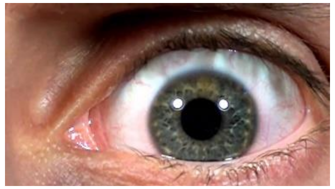
Experimento 4

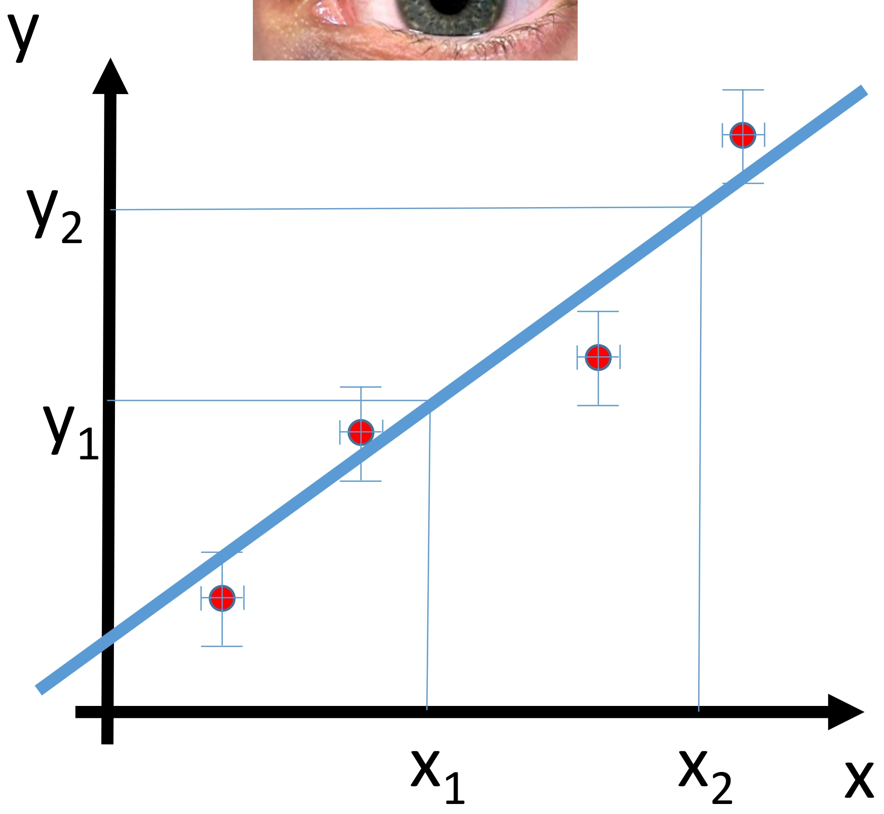
Aulas A e B:

Ajuste Linear pelo MMQ

Professor: Leonardo Machado Cavalcanti

Revisão: Ajuste **Visual** de uma reta aos dados





$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

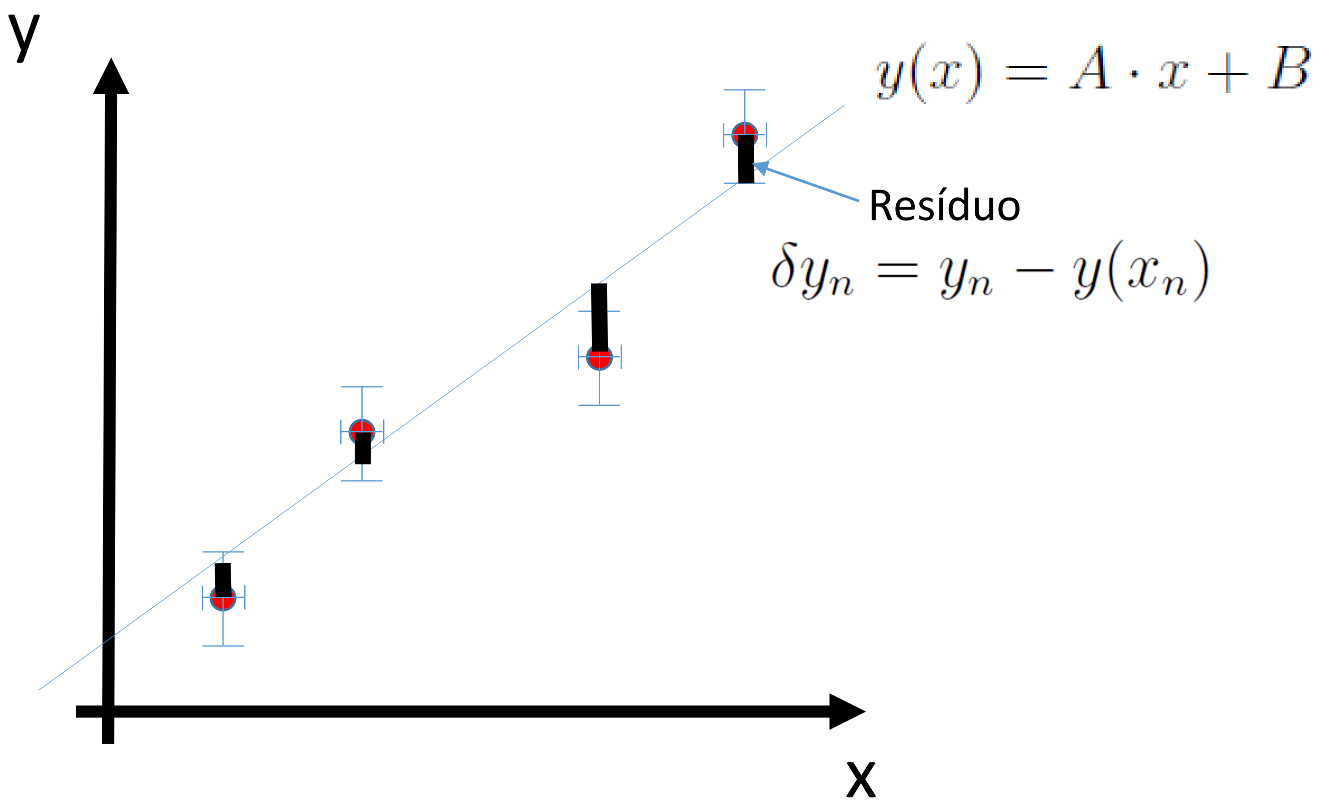
$$B = y(0) \text{ ou } B = y_1 - Ax_1$$

(interseção com o eixo y)

Desvantagem: método sujeito a erros de imprecisão humana.

Queremos encontrar um método “fechado” que nos forneça uma **reta ótima.**

Antes de abordarmos esse método “fechado”, vamos definir o que é um **RESÍDUO**



X_n	Y_n	$Y(X_n)$
1,0	1,0	A·1,0 + B
2,3	2,6	A·2,3 + B
4,1	3,1	A·4,1 + B
5,3	5,7	A·5,3 + B

Ajuste linear pelo <u>M</u>étodo dos <u>M</u>ínimos <u>Q</u>uadrados

(ou Regressão Linear)

Definição: Ajuste da **reta ótima** aos dados experimentais através da minimização da soma dos quadrados dos resíduos.

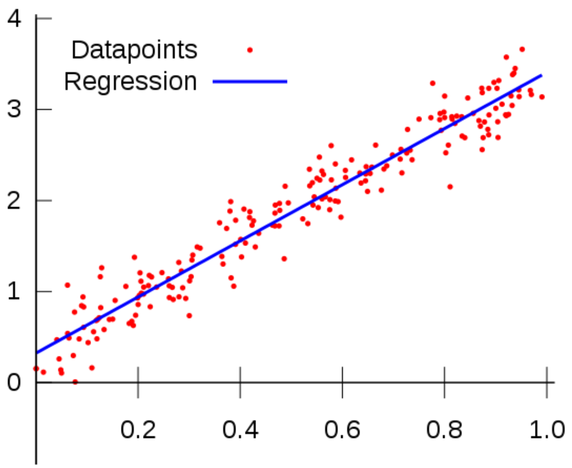
$$\delta y_n = y_n - y(x_n)$$

$$(\delta y_n)^2 = [y_n - y(x_n)]^2$$

$$y(x) = A \cdot x + B$$

$$\sigma_y^2 = \langle(\delta y)^2\rangle = \sum_{n=1}^{N} \frac{[y_n - y(x_n)]^2}{N}$$

$$\text{min} \left\{ \sigma_y^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{(y_n - Ax_n - B)^2}{N} \right\}$$



$$A = \frac{N s_{xy} - s_x s_y}{\Delta}$$

$$B = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta}$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{(y_n - A'x_n - B')^2}{N}$$

$$\sigma_y^2 = f(A', B')$$

Queremos encontrar A' e B' que minimizem *f*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial A'}\right|_{A'=A} = 0 \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial B'}\right|_{B'=B} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial A'} = \sum_n \frac{2}{N}(Ax_n + B - y_n)x_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\sum_n x_n^2 + B\sum_n x_n - \sum_n x_n y_n = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial B'} = \sum_n \frac{2}{N}(Ax_n + B - y_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\sum_n x_n + B\sum_n 1 - \sum_n y_n = 0.$$

$$\boxed{s_{x^2} = \sum_n x_n^2, \qquad s_x = \sum_n x_n, \qquad s_y = \sum_n y_n, \qquad \text{e} \qquad s_{xy} = \sum_n x_n y_n.}$$

$$\begin{cases} s_{x^2}A + s_x B &= s_{xy} \\ s_x A + NB &= s_y \end{cases}$$

$$\boxed{A = \frac{Ns_{xy} - s_x s_y}{\Delta}, \qquad B = \frac{s_{x^2}s_y - s_x s_{xy}}{\Delta},}$$

$$\Delta = Ns_{x^2} - s_x^2.$$

$$s_{x^2} = \sum_n x_n^2, \qquad s_x = \sum_n x_n, \qquad s_y = \sum_n y_n, \qquad \text{e} \qquad s_{xy} = \sum_n x_n y_n.$$

Exemplo:

	A	B	C
1			
2		xn (s)	yn (m)
3		0.1	0.51
4		0.2	0.59
5		0.3	0.72
6		0.4	0.8
7		0.5	0.92

Talvez seja necessário utilizar vírgula em vez de ponto (depende das configurações de idioma do SO)

=B3^2

=B3*C3

	A	B	C	D	E
1					
2		xn (s)	yn (m)	x_n^2	xnyn
3		0.1	0.51	0.01	0.051
4		0.2	0.59	0.04	0.118
5		0.3	0.72	0.09	0.216
6		0.4	0.8	0.16	0.32
7		0.5	0.92	0.25	0.46
8	**soma**	**1.5**	**3.54**	**0.55**	**1.165**

=SOMA(B3:B7)

$$s_x = \sum_n x_n$$

=SOMA(C3:C7)

$$s_y = \sum_n y_n$$

=SOMA(D3:D7)

$$s_{x^2} = \sum_n x_n^2$$

=SOMA(E3:E7)

$$s_{xy} = \sum_n x_n y_n$$

Queremos encontrar os coeficientes da reta ótima:

$$A = \frac{N s_{xy} - s_x s_y}{\Delta}, \qquad B = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta},$$

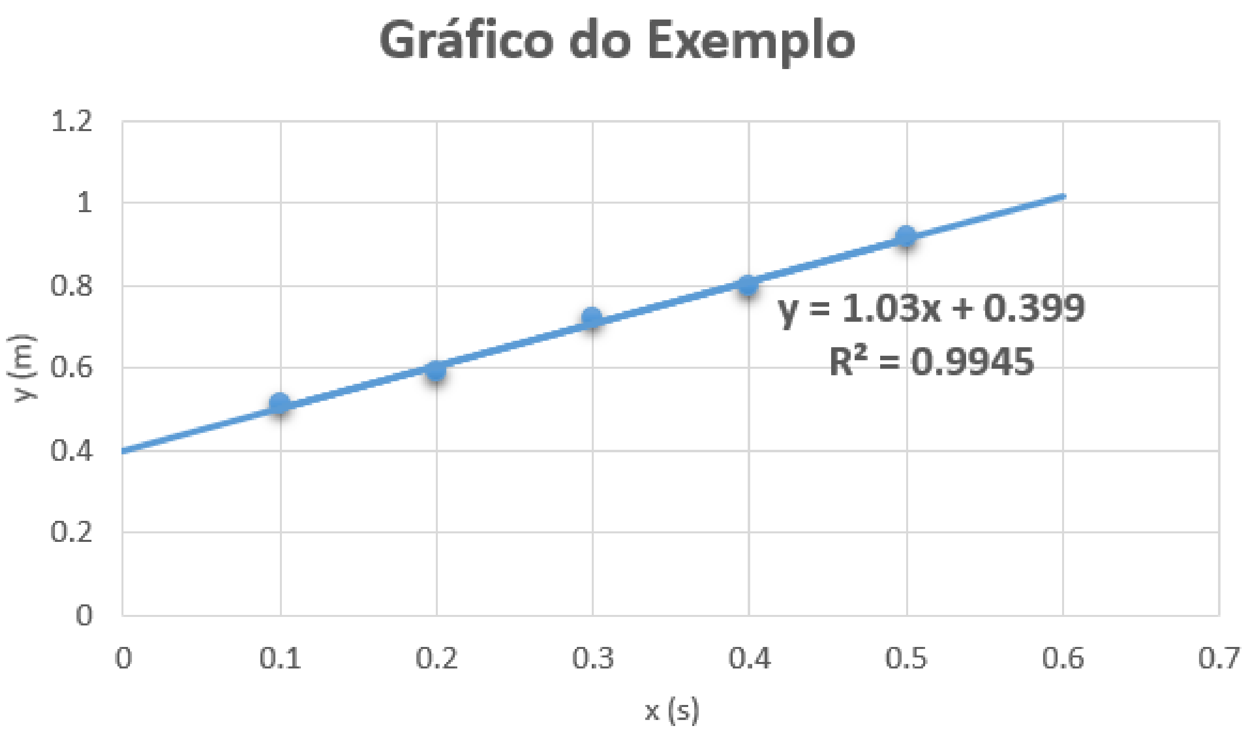
	A	B	C	D	E
1					
2		x_n (s)	y_n (m)	x_n^2	$x_n y_n$
3		0.1	0.51	0.01	0.051
4		0.2	0.59	0.04	0.118
5		0.3	0.72	0.09	0.216
6		0.4	0.8	0.16	0.32
7		0.5	0.92	0.25	0.46
8	**soma**	**1.5**	**3.54**	**0.55**	**1.165**
9					
10		N	5		
11		delta	0.5		
12		A	1.03		
13		B	0.399		

Número de medidas

$\Delta = N s_{x^2} - s_x^2.$ =C10*D8-B8^2

$$A = \frac{N s_{xy} - s_x s_y}{\Delta}$$ =(C10*E8-B8*C8)/C11 **Unidade: m/s**

$$B = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta}$$ =(D8*C8-B8*E8)/C11 **Unidade: m**



Ajuste linear pelo MMQ no Excel

- É possível encontrar os coeficientes A e B da reta ótima **diretamente** pelo Excel. *("Prova Real")* para seus resultados no relatório!)

Talvez seja necessário utilizar vírgula em vez de ponto (depende das configurações de idioma do SO)

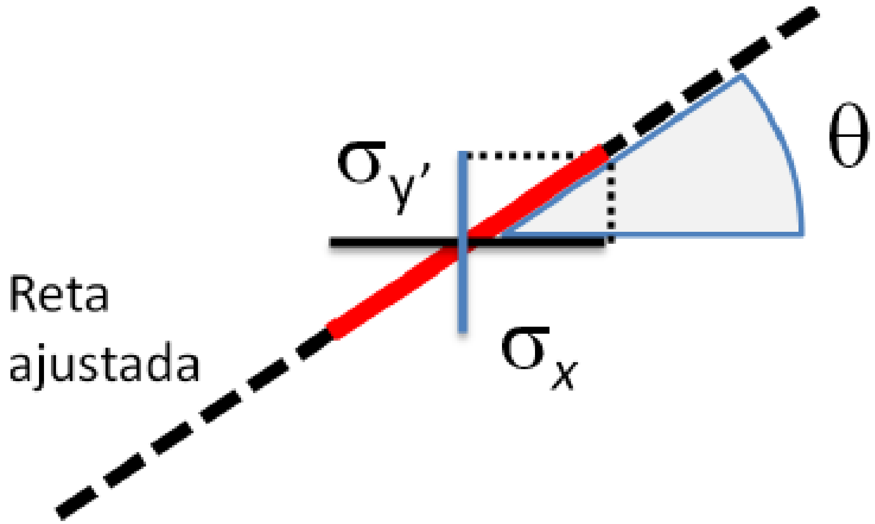
	A	B	
1	x_n (s)	y_n (m)	
2	0.1	0.51	
3	0.2	0.59	
4	0.3	0.72	
5	0.4	0.8	
6	0.5	0.92	
7			
8	A	1.03	=INCLINAÇÃO(B2:B6,A2:A6)
9	B	0.399	=INTERCEPÇÃO(B2:B6,A2:A6)

Incertezas dos coeficientes da reta ótima

Suas incertezas se escrevem em termos da incerteza σ de medida (igual para todas as medidas), como

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{N}{\Delta}}\,\sigma_{y,\,T} \qquad \sigma_B = \sqrt{\frac{s_{x^2}}{\Delta}}\,\sigma_{y,\,T}$$

Propagação de incerteza entre eixos



$$\sigma_{y'} = \sigma_x \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sigma_x \tan\theta.$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \frac{dy}{dx}.$$

$$\sigma_{y,T} = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{y'}^2}$$
$$= \sqrt{\sigma_y^2 + \left(\sigma_x \frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$$\boxed{\sigma_{y,T} = \sqrt{\sigma_y^2 + A^2\sigma_x^2}.}$$

A incerteza total $\sigma_{y,T}$ é aquela a ser utilizada no gráfico de x_n versus y_n em vez de σ_y.