Experimento 3

Aulas A e B:

Histograma e Linearização de gráficos por mudança de variável

Professor: Leonardo Machado Cavalcanti

Média e Desvio Padrão no **Excel**

	A	B
1	T1	2,8432
2	T2	2,8367
3	T3	2,8805
4	MÉDIA	=MÉDIA(B1:B3)
5	DESVIO	

Press Enter

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m_k = \langle m \rangle$$

	A	B
1	T1	2,8432
2	T2	2,8367
3	T3	2,8805
4	MÉDIA	2,853466667
5	DESVIO	

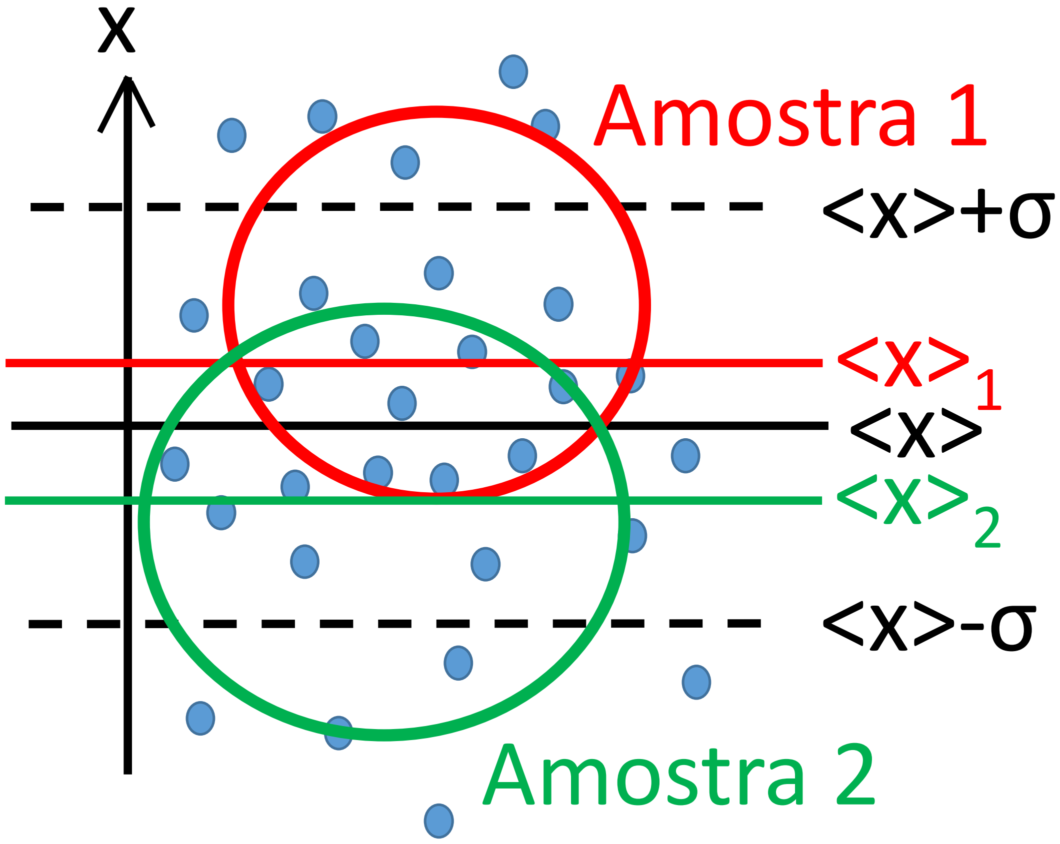
	A	B
1	T1	2,8432
2	T2	2,8367
3	T3	2,8805
4	MÉDIA	2,853466667
5	DESVIO	=DESVPAD.A(B1:B3)

Press Enter

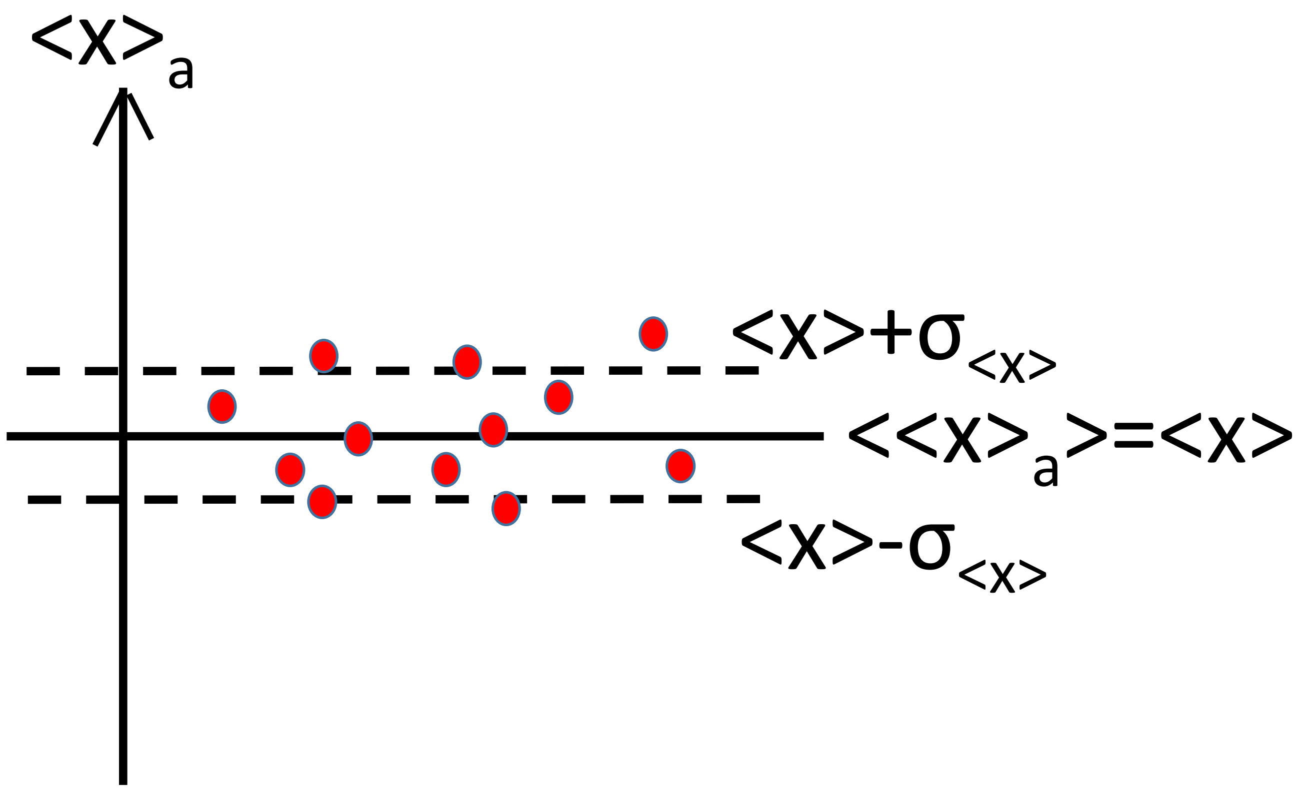
$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} (m_k - \langle m \rangle)^2$$

	A	B
1	T1	2,8432
2	T2	2,8367
3	T3	2,8805
4	MÉDIA	2,853466667
5	DESVIO	0,02363606

Revisão da última aula



População



$$\sigma_{\langle x\rangle} = \sigma/\sqrt{N}$$

Escrevendo uma medida (considerando σ_{inst}=0)

$$x = \langle x \rangle \pm \sigma_{\langle x \rangle}$$

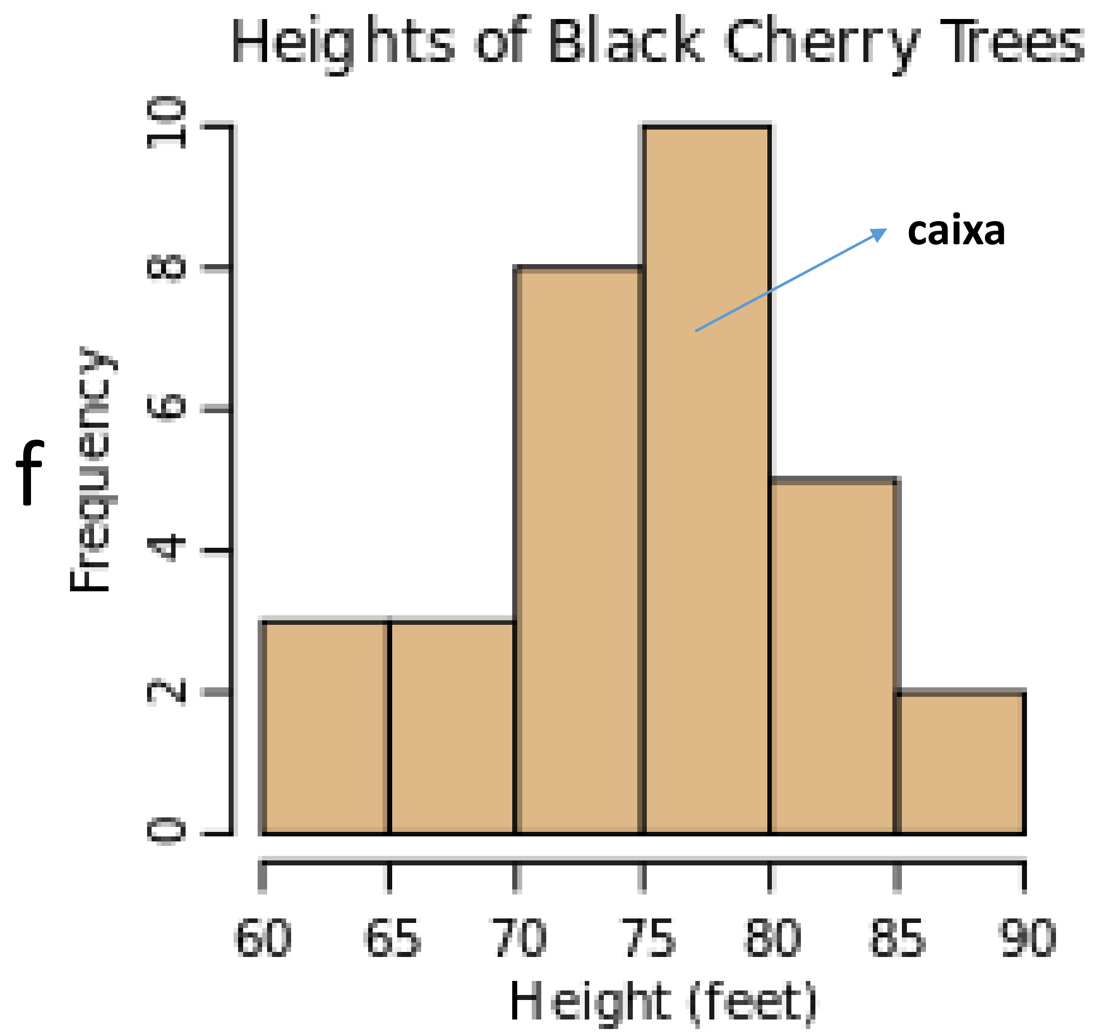
ou

$$x = x_i \pm \sigma$$

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Caso $\sigma_{inst} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\sigma_{\text{tot}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{inst}} + \sigma^2_{\text{est}}},$

<u>Histograma:</u> representa a frequência de medidas com valores similares



N: nº de medições

n: nº de caixas *(bins)*

f: frequência absoluta

p=f/N: probabilidade (freq. relativa)

Procedimento para construir um histograma

- 1) Determinar o número de caixas **n** = $1+3{,}322*\log_{10}N$ ou **n** = $N^{0,5}$ ou um número arbitrário de tal modo que produza um "bom" histograma.

- 2) Calcular largura das caixas $\Delta\boldsymbol{x} = \frac{x_{max}-x_{min}}{n}$

- 3) Construir tabela de frequências

- 4) Desenhar Histograma

OBS: Não há uma regra única para construção do histograma. Apresento aqui um procedimento descrito no livro "Estatística usando Excel" de Juan Carlos Lapponi.

Exemplo (retirado do livro “Estatística usando Excel” de Juan Carlos Lapponi)

A tabela seguinte registra uma amostra aleatória de tamanho 25 das *Vendas diárias* em milhares de uma empresa. Construa o histograma, isto é, a distribuição de frequências.

280, 305, 320, 330, 310,

340, 330, 341, 369, 355,

370, 360, 370, 365, **280**,

375, 380, 400, 371, 390,

400, 370, 401, 420, **430**

Valor Mínimo = 280

Valor Máximo = 430

1) Determinar o número de caixas **n**

$$\mathbf{n} = 1+3{,}322*\log_{10}(N) = 1+3{,}322*\log_{10}(25) = \mathbf{5{,}6440}$$

Pode-se arredondar o resultado tanto para o maior como para o menor valor inteiro.

Escolheremos **n = 5**.

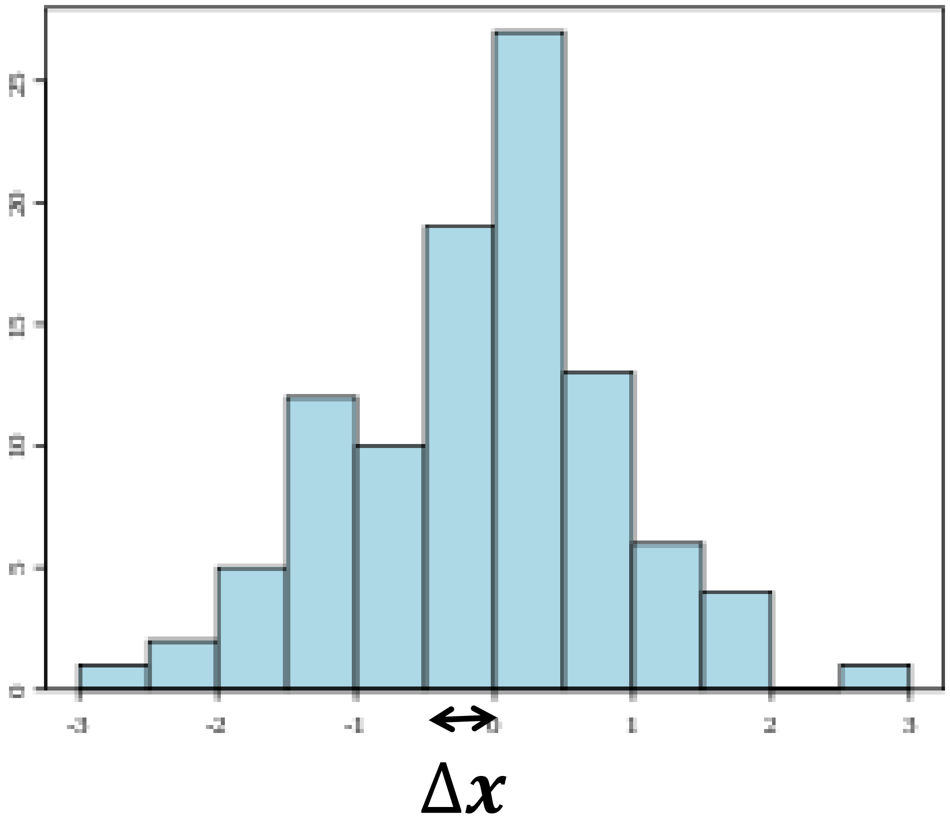
2) Calcular a largura das caixas

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}$$

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{430 - 280}{5}$$

$$\Delta \boldsymbol{x} = 30$$

FIGURA GENÉRICA

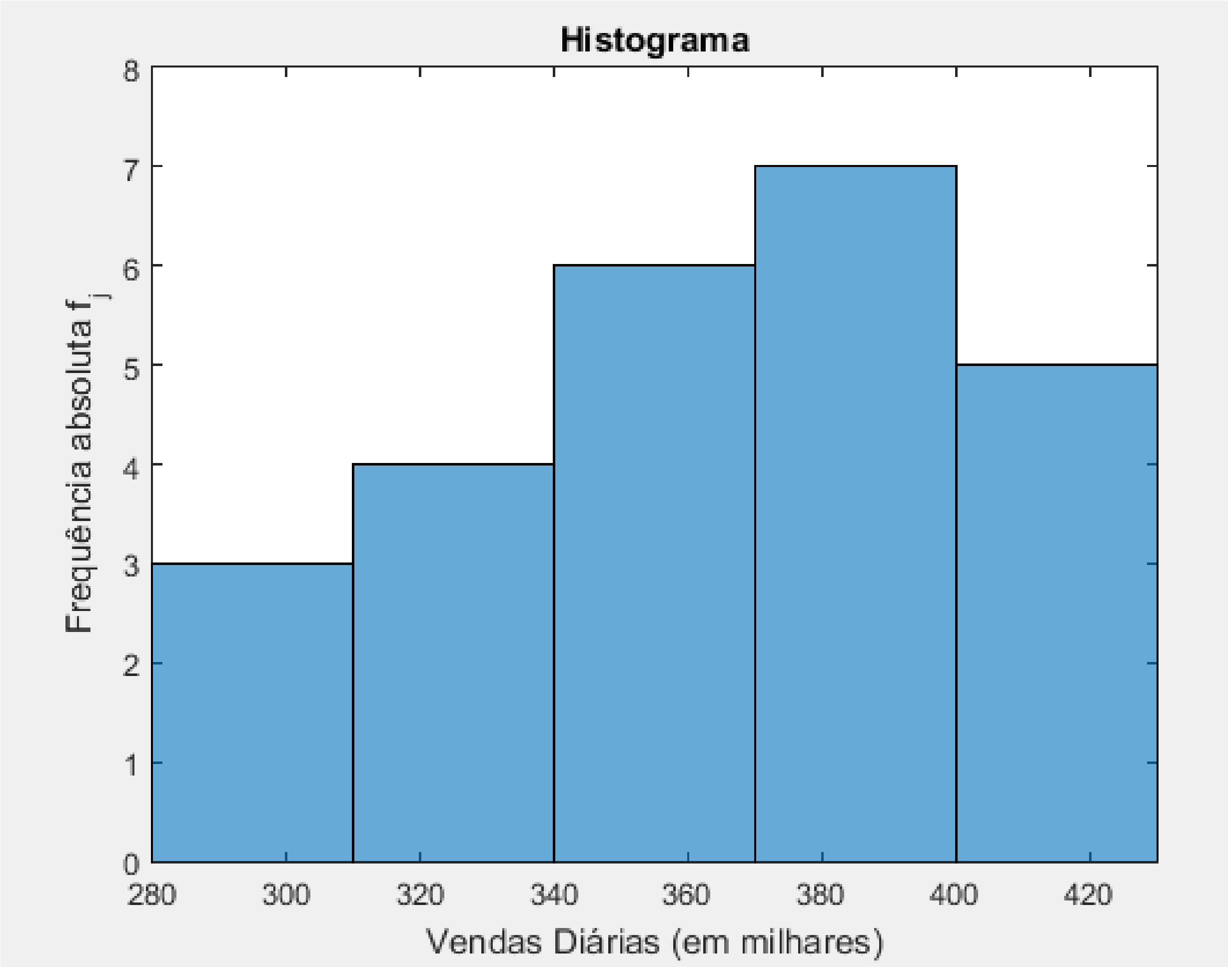


3) Construir tabela de frequências

$p_j = f_j/N = f_j/25$

Intervalo de cada caixa	Valor mediano x_j	Frequência absoluta (f_j)	Probabilidade (Freq. relativa)
[280; 310[	295	3	12,00%
[310, 340[	325	4	16,00%
[340, 370[	355	6	24,00%
[370, 400[	385	7	28,00%
[400, 430]	415	5	20,00%
Total		**25**	**100%**

4) Desenhar Histograma



Intervalo de cada caixa	**Valor mediano x_j**	**Frequência absoluta (f_j)**	**Probabilidade (Freq. relativa)**
[280; 310[	295	3	12,00%
[310, 340[	325	4	16,00%
[340, 370[	355	6	24,00%
[370, 400[	385	7	28,00%
[400, 430]	415	5	20,00%
Total		**25**	**100%**

Propriedades Estatísticas através do Histograma

- Média (amostral)

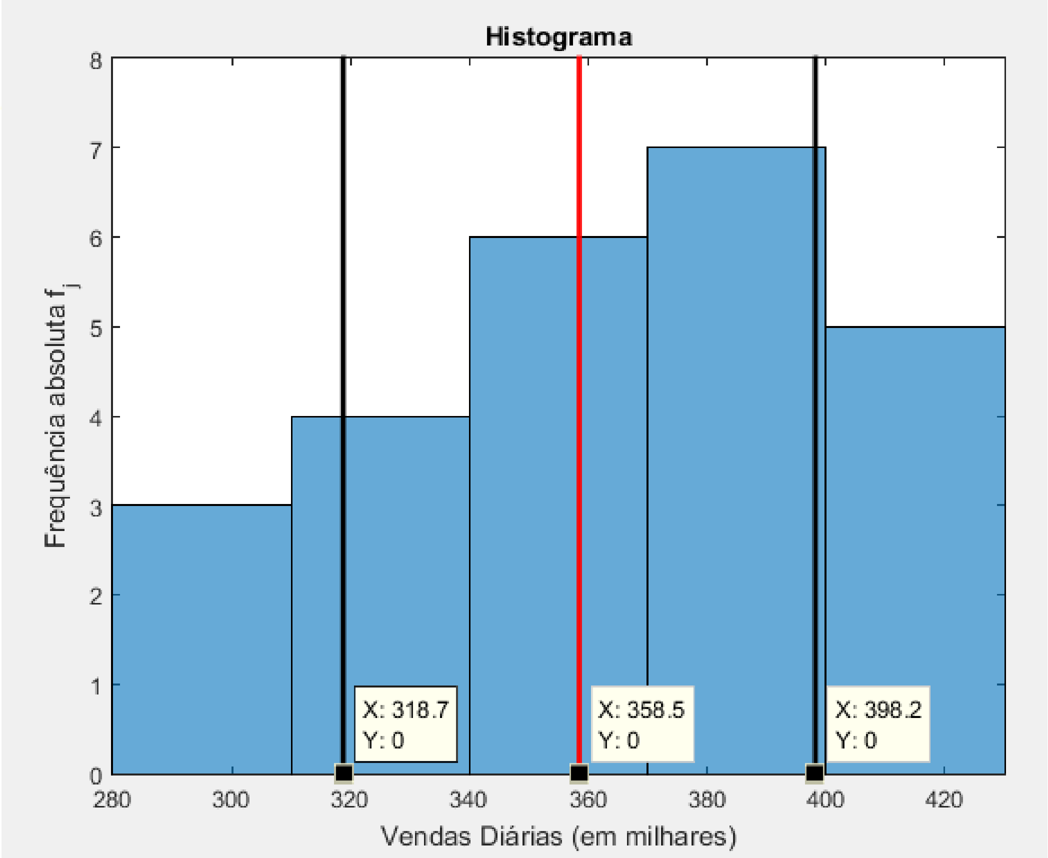
$$\langle x \rangle = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \cdots + f_n \cdot x_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} f_j \cdot x_j$$

$$\langle x \rangle = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots + p_n \cdot x_n = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j$$

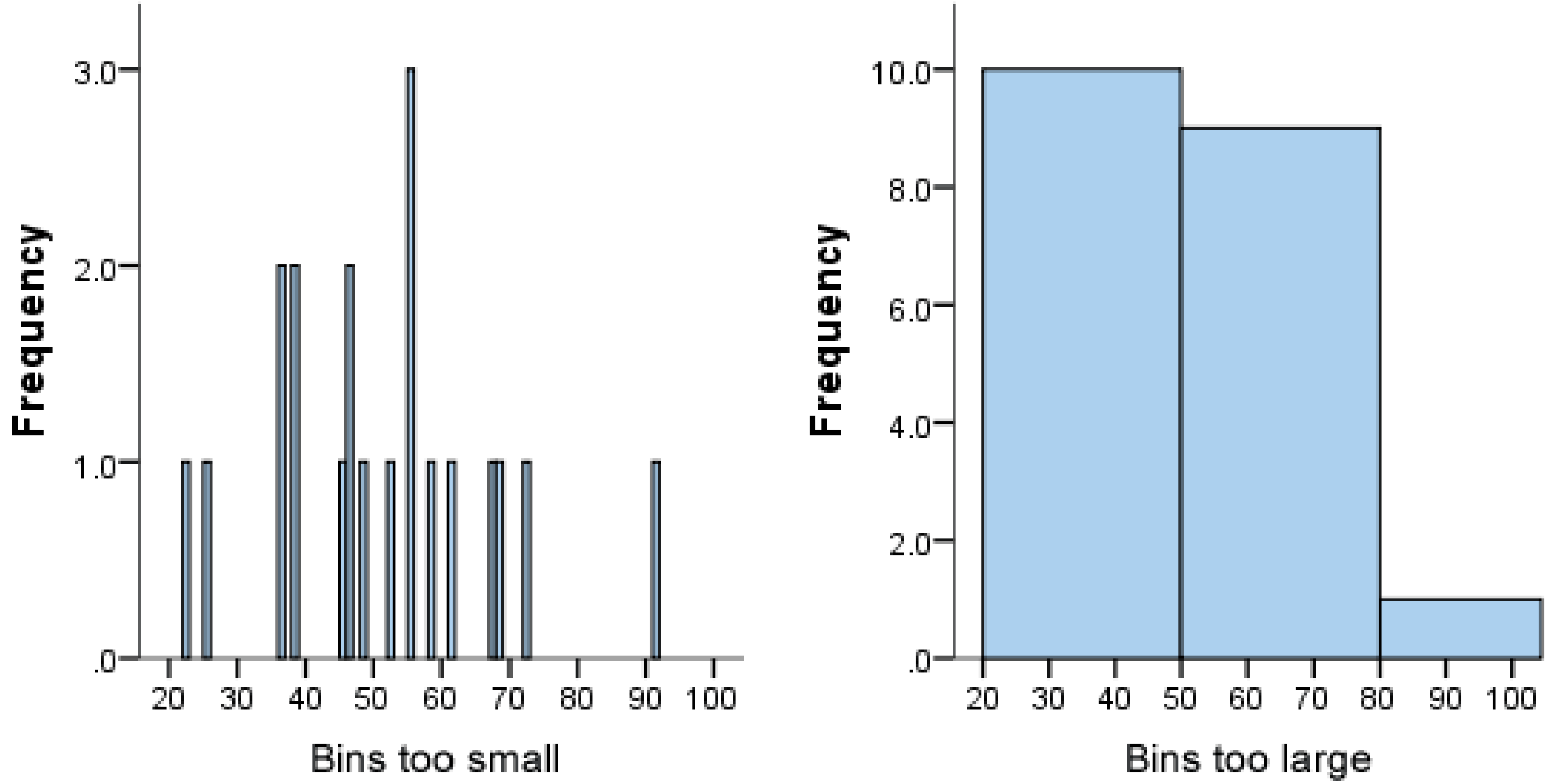
- Desvio padrão (amostral)

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$

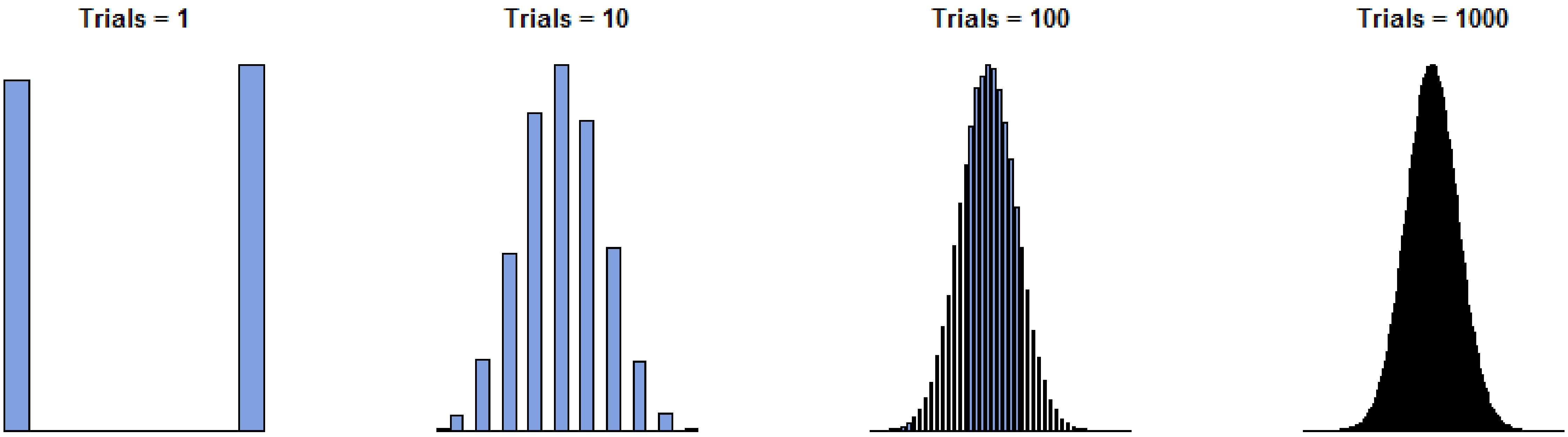
$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} f_j \cdot x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j}{N} \cdot x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j^2.$$



<u>OBS!</u> Cuidado na escolha do número de caixas **n** (ou da largura das caixas)

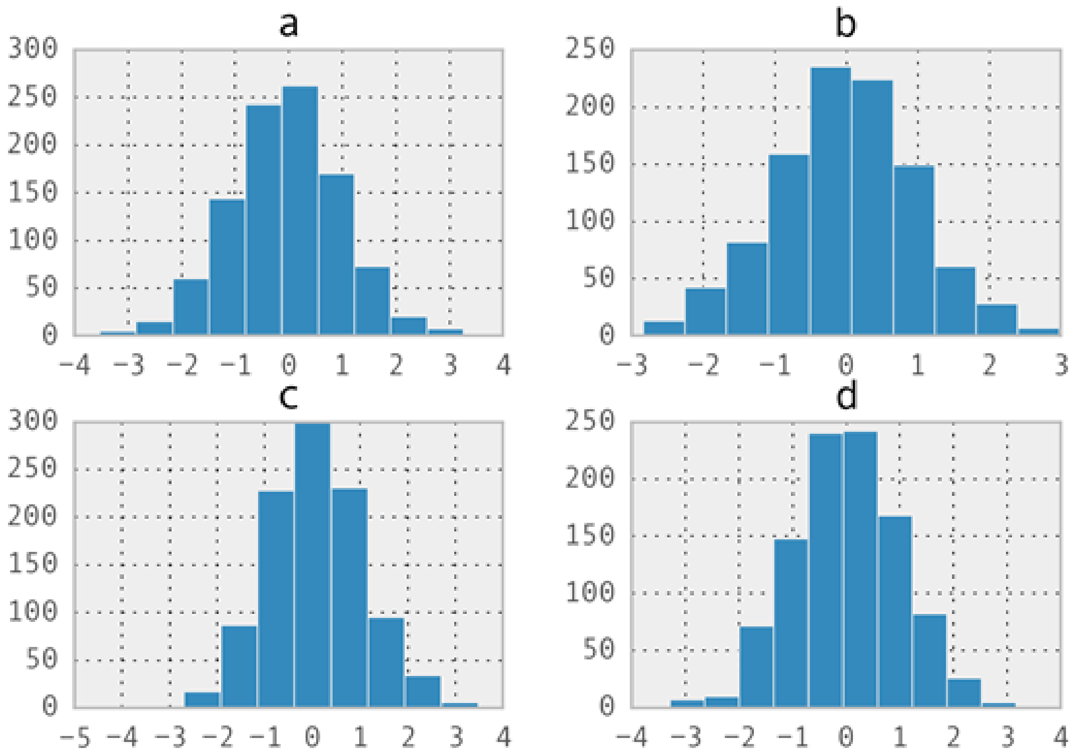


Aumentando o número de amostras (N→∞)



Incerteza nos parâmetros de um histograma

- Ao realizar-se diferentes coletas de dados da população, obtém-se diferentes amostras (por consequência, diferentes histogramas).



O numero de medidas N_i observadas em um intervalo:

$$N_i \pm \sqrt{N_i}$$

Ex: número de medições dentro do intervalo do desvio padrão (68%)

$$0{,}68N \pm \sqrt{0{,}68N}$$

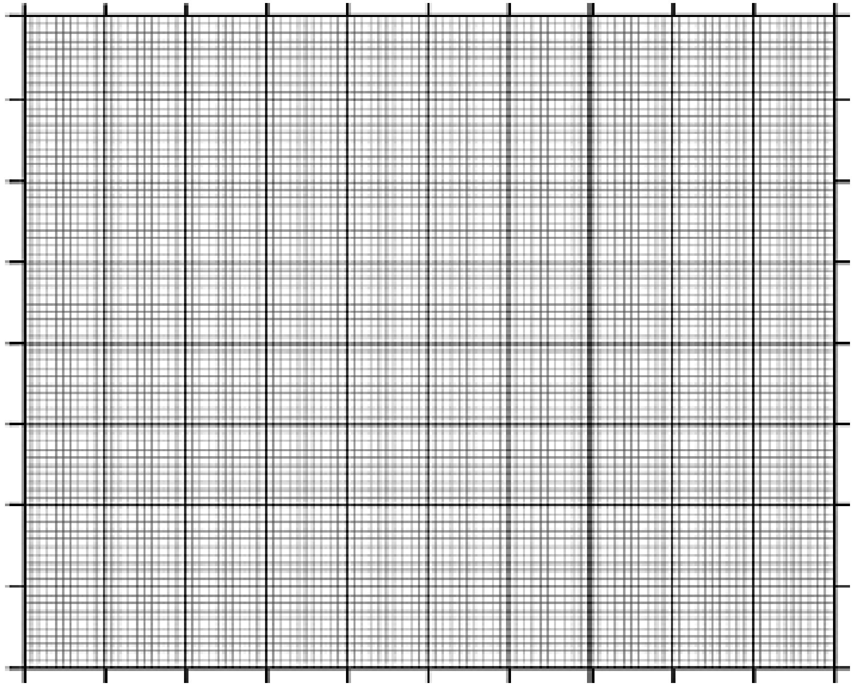
Histograma no Excel

- http://www.fis.ita.br/labfis13/matdidatico/computacao/excel/material/const_gaussiana/tutorial.htm

Para os interessados!

Questão 2: Num experimento de queda livre, foram realizadas 20 medidas do tempo de queda *t* e organizadas de acordo com a tabela a seguir. Foi utilizado um cronômetro digital com resolução de 0,01 s.

1,52 s	1,92 s	1,83 s	2,12 s	1,45 s
1,07 s	1,74 s	1,58 s	1,90 s	2,73 s
0,98 s	1,31 s	1,40 s	1,76 s	1,41 s
1,73 s	1,55 s	1,77 s	2,33 s	1,59 s

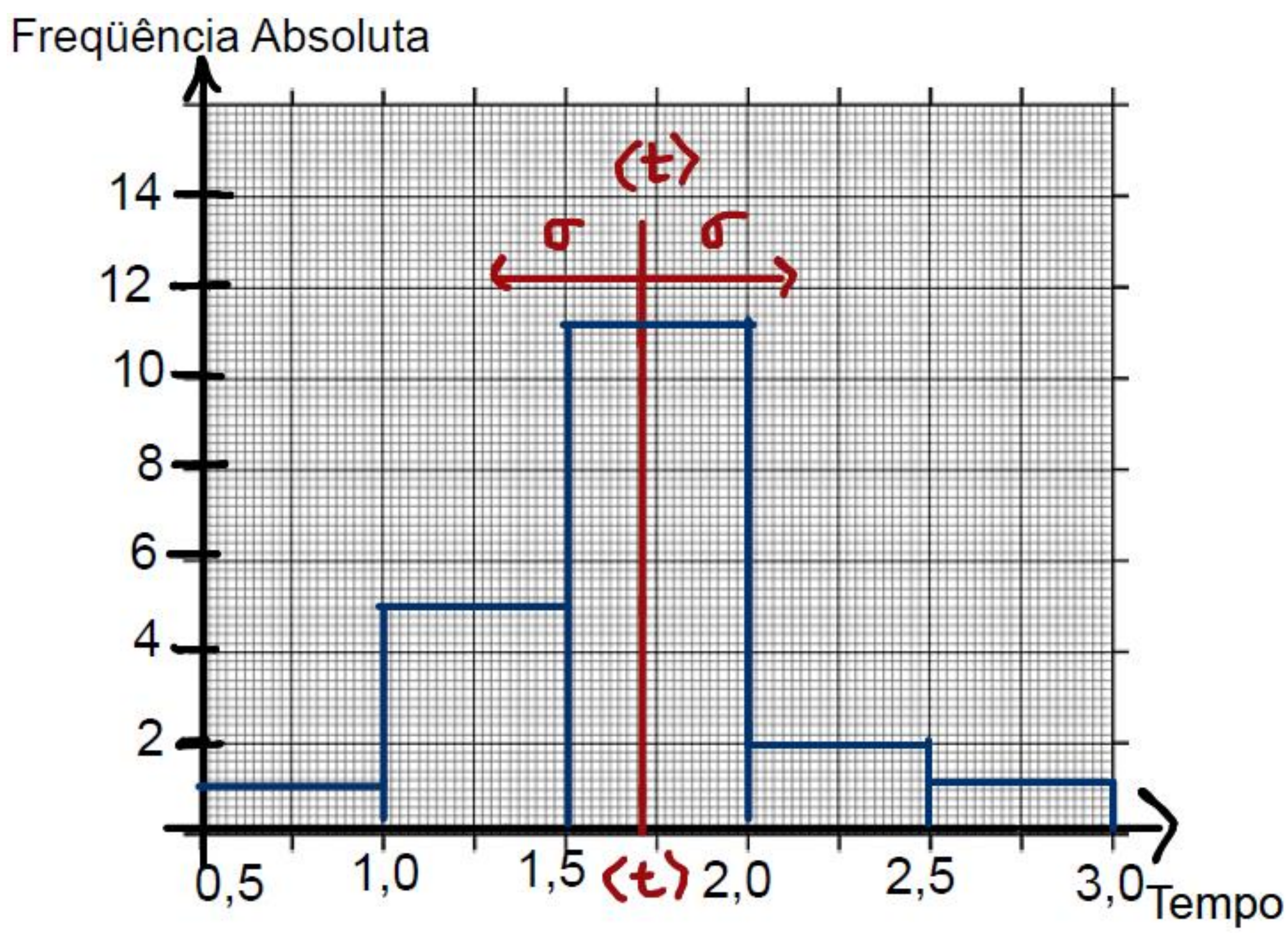


a) **[1,0 ponto]** No papel milimetrado, represente um histograma das medidas do tempo de queda, começando em 0,5 s e indo até 3,0 s, contendo 5 caixas nesse intervalo;

b) **[1,5 ponto]** Calcule o valor médio ($\langle t \rangle$), o desvio padrão (σ) e o desvio padrão da média ($\sigma_{\langle t \rangle}$) do tempo de queda *t* e enuncie o valor do tempo de queda. Identifique no histograma o valor médio ($\langle t \rangle$) e o desvio padrão (σ);

c) **[0,5 ponto]** Conhecendo as propriedades estatísticas do conjunto, enuncie o valor experimental do tempo de queda *t* caso ele fosse determinado por apenas umas das medidas da tabela.

d) **[1,0 ponto]** Suponha que o corpo é abandonado de uma altura $h = (14{,}0 \pm 0{,}5)$ m. Determine o módulo da aceleração gravitacional (g), com sua respectiva incerteza e verifique se é compatível com o valor 9,781 m/s^2. Justifique.



1,52 s	1,92 s	1,83 s	2,12 s	1,45 s
1,07 s	1,74 s	1,58 s	1,90 s	2,73 s
0,98 s	1,31 s	1,40 s	1,76 s	1,41 s
1,73 s	1,55 s	1,77 s	2,33 s	1,59 s

Intervalo	Frequência Absoluta
[0,5; 1,0[	1
[1,0; 1,5[	5
[1,5; 2,0[	11
[2,0; 2,5[	2
[2,5; 3,0[	1

$$\boxed{\langle t\rangle = \sum_{i=1}^{20} t_i/20 = 1{,}6845\ s}$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \langle t\rangle)^2} = 0{,}395670\ s$$

ou

$$\sigma = \sqrt{\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2} = 0{,}395670\ s$$

com $\langle t^2\rangle = 2{,}9941\ s$

$$\boxed{\sigma_{\langle t\rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{20}} = \frac{0{,}395670}{\sqrt{20}} = 0{,}08847\ s}$$

$$t = (\langle t\rangle + \sigma_T)\ s \quad \text{onde} \quad \sigma_T = \sqrt{\sigma_{ins}^2 + \sigma_{\langle t\rangle}^2} = \sqrt{(0{,}01)^2 + (0{,}09)^2} = 0{,}0906$$

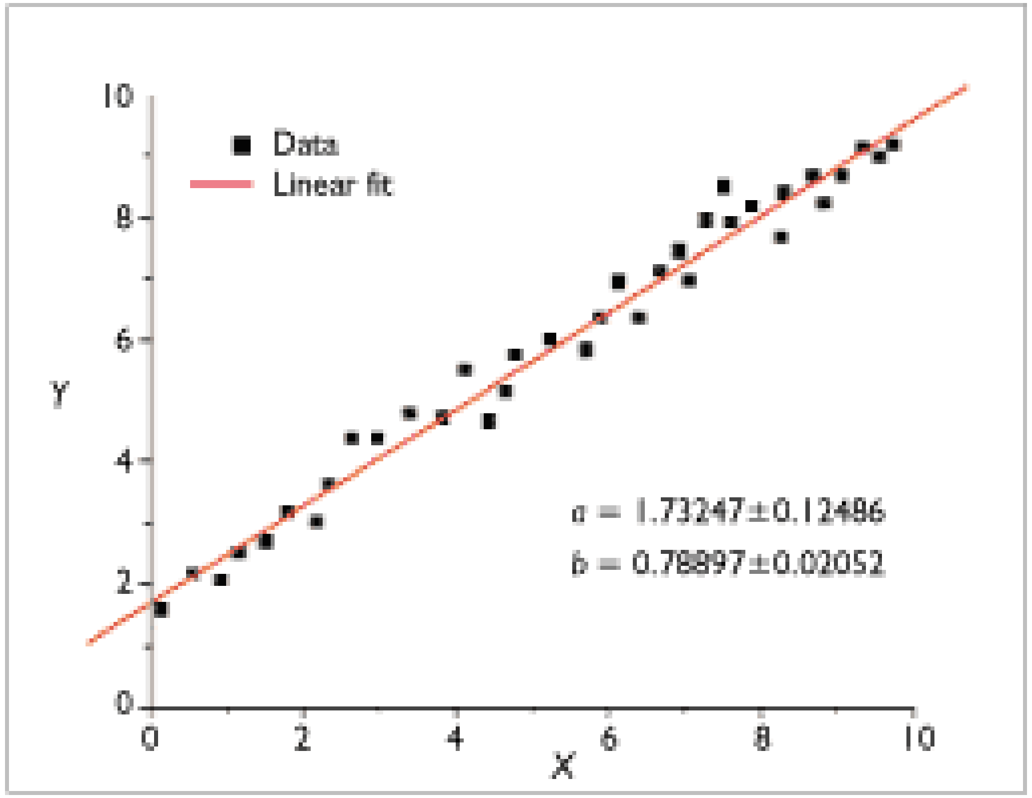
$$\boxed{t = (1{,}68 \pm 0{,}09)\ s} \qquad \boxed{\sigma_T = 0{,}09\ s}$$

c) Escolhemos uma medida do tempo de queda da tabela. Nesse caso $\boxed{\sigma_T = \sqrt{\sigma_{ins}^2 + \sigma^2} = 0{,}4\ s}$. Assim, $t_i = 1{,}73\ s \rightarrow \boxed{t = (1{,}7 \pm 0{,}4)\ s}$

Procura-se uma reta!

$$y = Ax + B$$

$(A=?\ B=?)$



A: Coeficiente Angular
B: Coeficiente Linear

Procura-se ajustar uma reta aos dados experimentais.

- **Ajuste Visual**
- Ajuste MMQ (em breve)

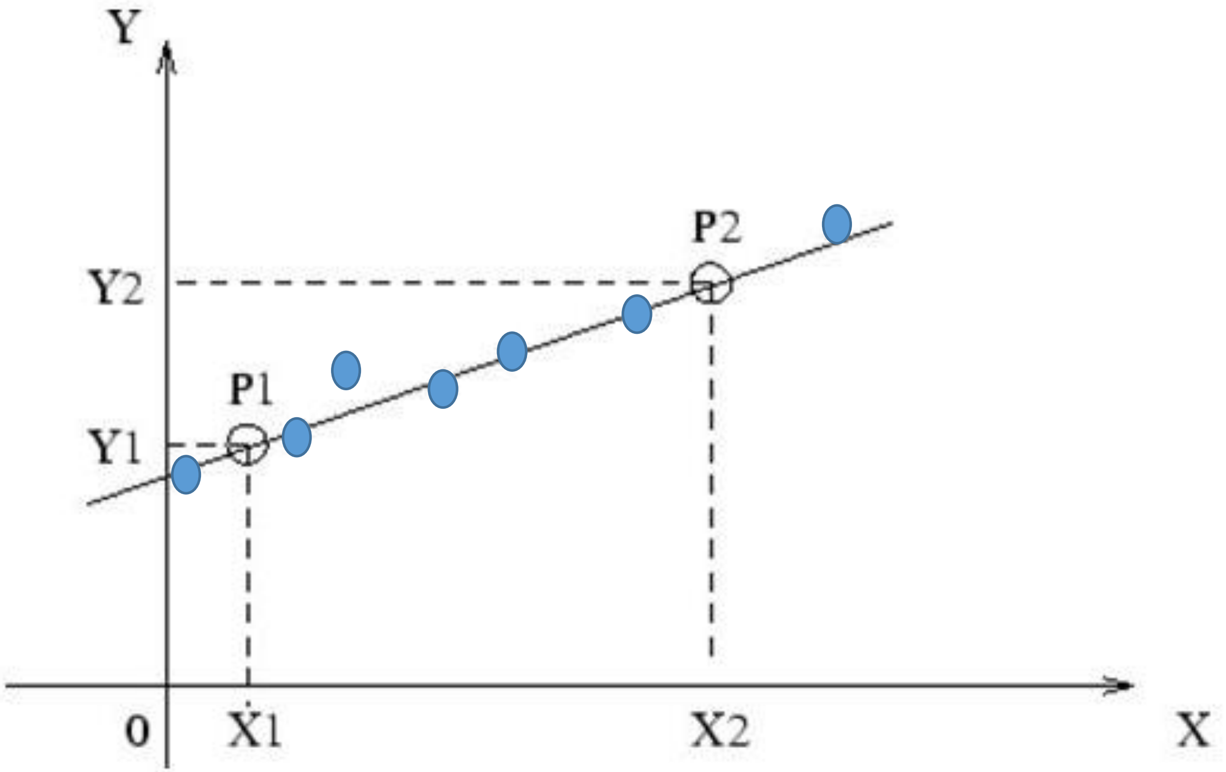
Procura-se uma reta!

y = Ax +B
(A=? B=?)

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$B = y(0) \text{ ou } B = y_1 - Ax_1$$

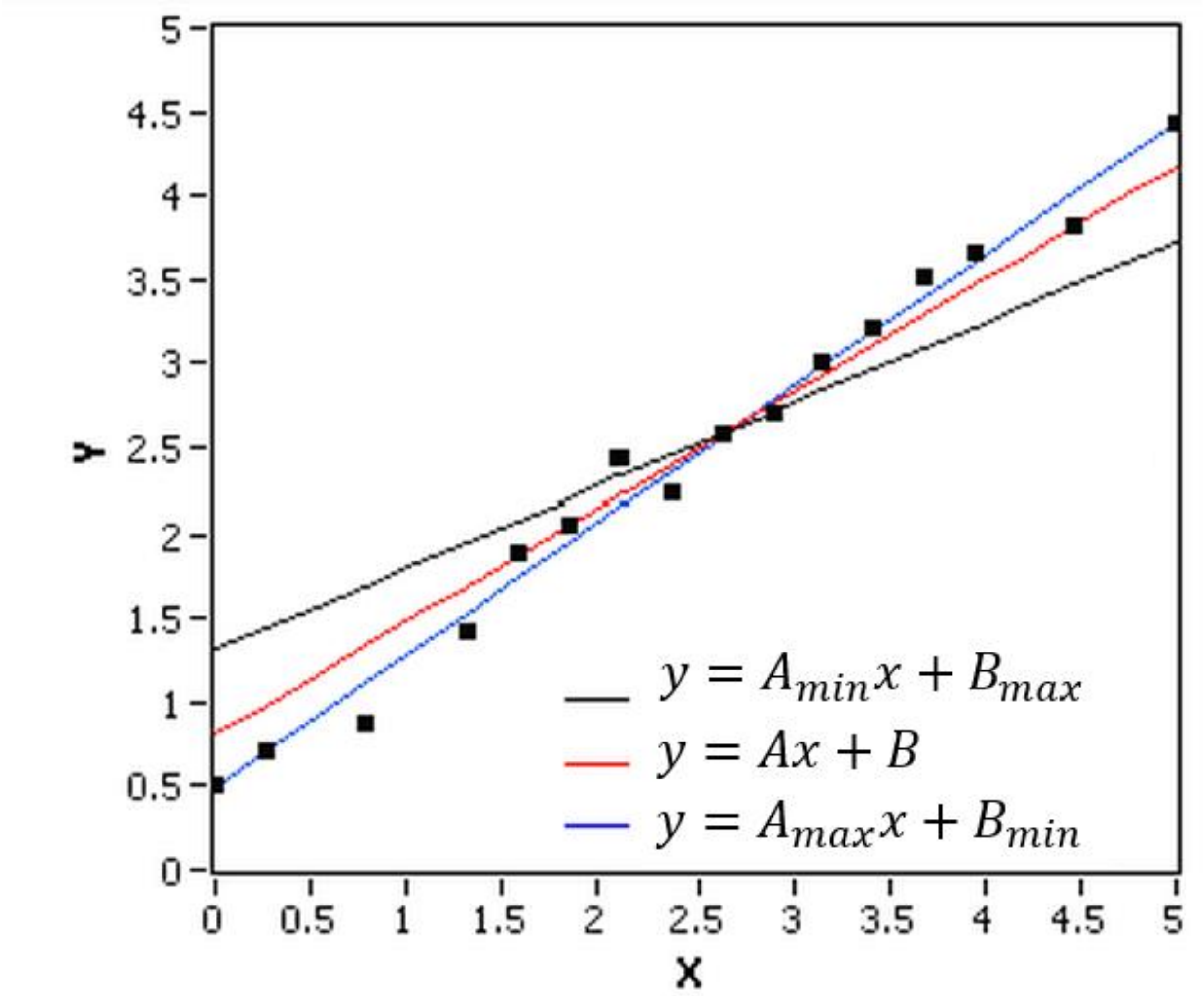
(interseção com o eixo y)



Utilizem os valores de x e y de acordo com a escala e as unidades adotadas!

P1 e P2 são pontos pertencentes à reta. Os pontos em azul são dados experimentais.

Incerteza de A e B num ajuste **visual**



Para estimar a incerteza dos coeficientes A e B do ajuste linear visual, traçam-se **duas** retas, uma com inclinação maior e outra com inclinação menor. Os coeficientes da reta "média" com suas respectivas incertezas são dados por:

$$A = \frac{A_{max} + A_{min}}{2} \pm \frac{A_{max} - A_{min}}{2}$$

$$B = \frac{B_{max} + B_{min}}{2} \pm \frac{B_{max} - B_{min}}{2}$$

Linearização de gráficos

- O que fazer se as grandezas não têm relação linear?
  - ✓ **Mudança de variável**
  - ✓ Mudança do tipo de papel para monolog ou dilog (em breve)

$$y = Ax$$

Relação linear entre **y** e **x**.

$$y = Ax^3$$

$$y = A\sqrt{x}$$

$$y = Ax^2$$

Relações não lineares entre **y** e **x**.

Mudança de variável

$$u = x^3$$
$$w = \sqrt{x}$$
$$\mathrm{z} = x^2$$

$$y = Au$$

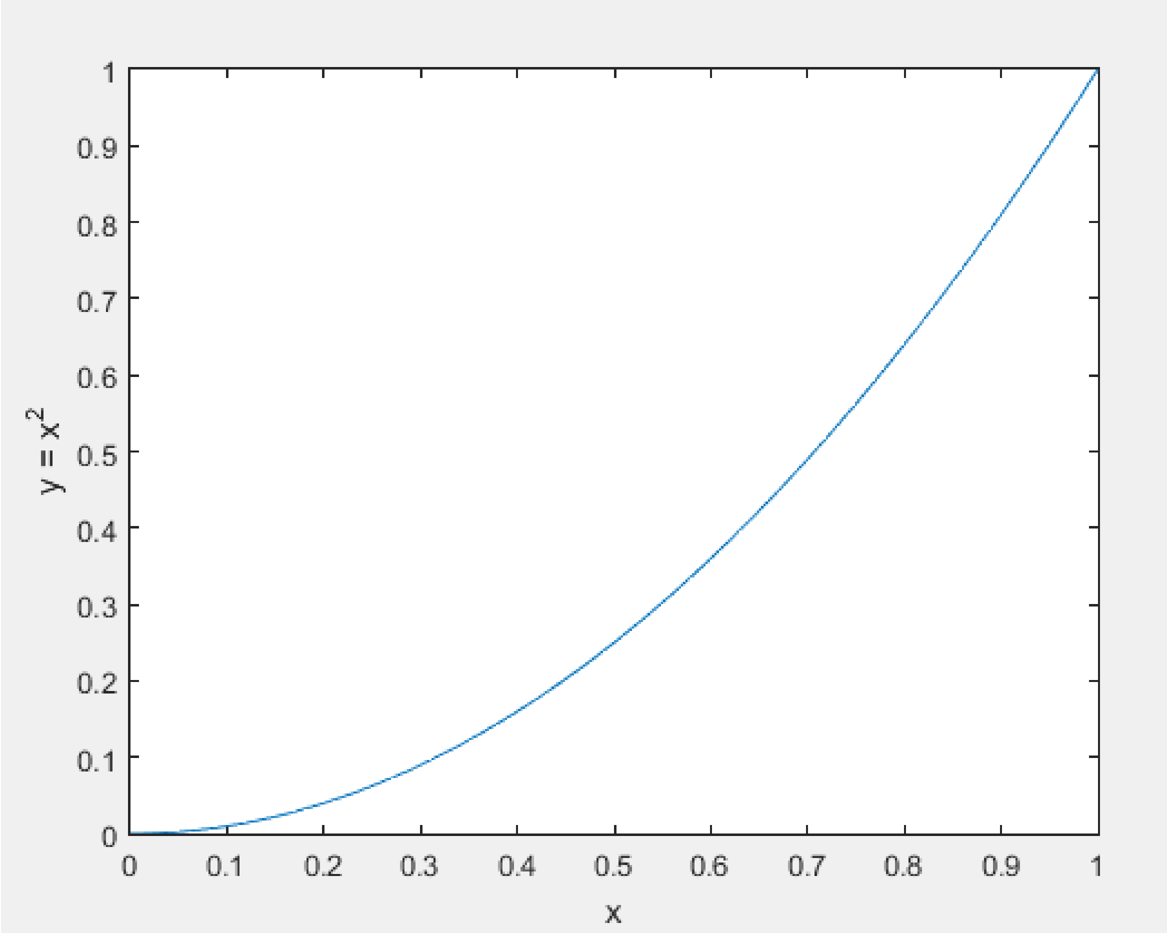
$$y = Aw$$

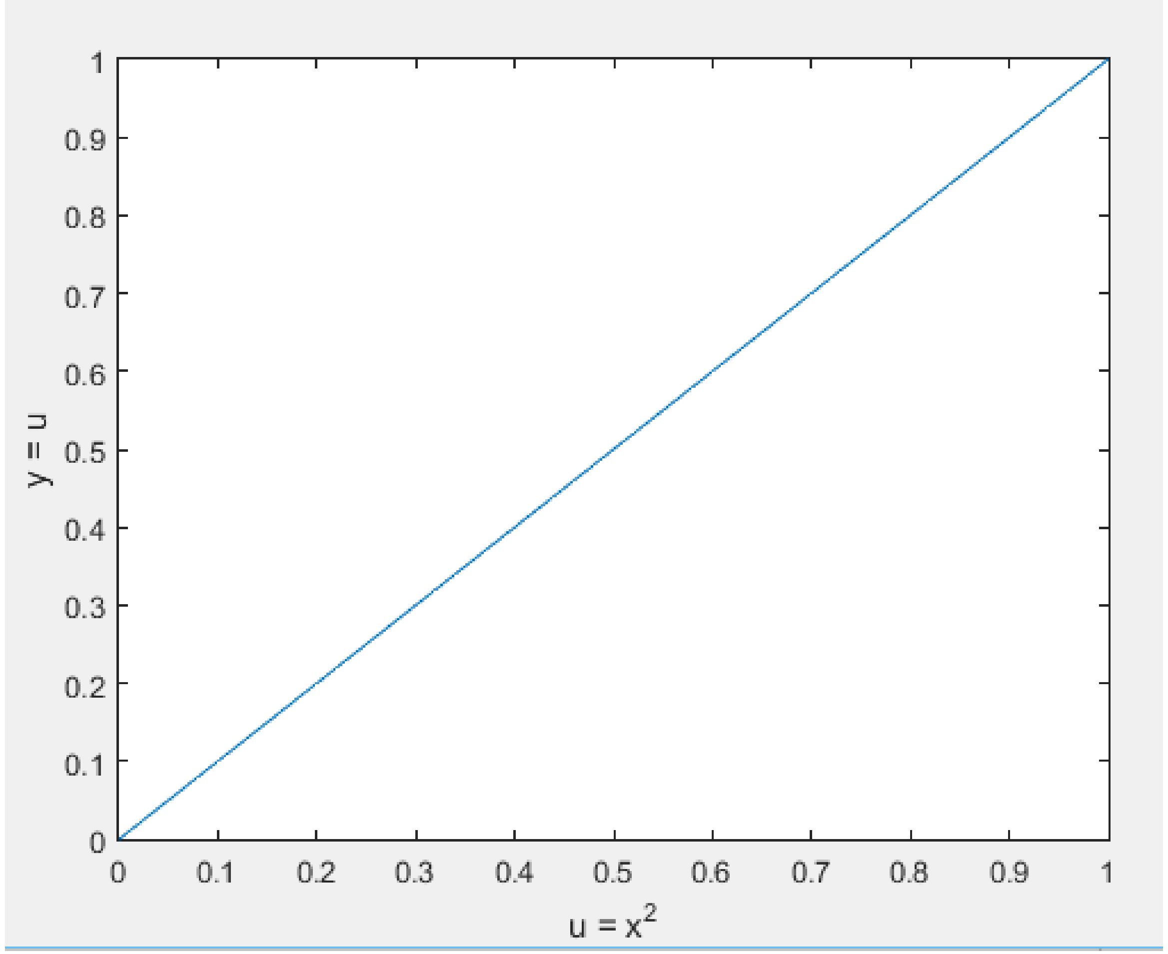
$$y = Az$$

Relações lineares entre **y** e **u**, **y** e **w**, **y** e **z**.

Linearização de gráficos

- Exemplo: $y = x^2$ $\quad u = x^2 \quad$ $y = u$





Propagação da incerteza na mudança de variável

$$y = x^2 \text{ (parábola)}$$

Substituindo $u = x^2$, tem-se:

$$y = u \text{ (reta)}$$

Qual a incerteza de *u*?

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{du}{dx}\sigma_x\right)^2 = (2x\sigma_x)^2 \therefore \sigma_u = 2|x|\sigma_x$$

Discernimento!

A linearização que estamos nos referindo não é a linearização de funções em um ponto.