



Experimento 2

Aulas A e B:

Noções de Estatística

Professor: Leonardo Machado Cavalcanti

Não esqueçam dos parênteses!

$$L = 3,456 \pm 0,005 \text{ mm} \text{ [ERRADO]}$$

$$L = (3,456 \pm 0,005) \text{ mm} \text{ [CORRETO]}$$

Cuidado com Unidades e Potências de 10!

$$L = (15 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}) \text{ [ERRADO]}$$

$$L = (15 \cdot 10 \text{ cm} \pm 1 \cdot 10 \text{ cm}) \text{ [ERRADO]}$$

$$L = (15 \cdot 10 \pm 1 \cdot 10) \text{ cm} \text{ [ERRADO]}$$

$$L = (15 \pm 1) \cdot 10 \text{ cm} \text{ [CORRETO]}$$

Incerteza tem apenas 1 Algarismo Significativo!

$$L = (46,778 \pm 0,078) \text{ cm} \text{ [ERRADO]}$$

$$L = (46,78 \pm 0,08) \text{ cm} \text{ [CORRETO]}$$

$$L = (345,6 \pm 10,8) \text{ cm} \text{ [ERRADO]}$$

$$L = (35 \pm 1) \cdot 10 \text{ cm} \text{ [CORRETO]}$$

$$L = (3,5 \pm 0,1) \cdot 10^2 \text{ cm} \text{ [CORRETO]}$$

Revisão sobre incertezas instrumentais



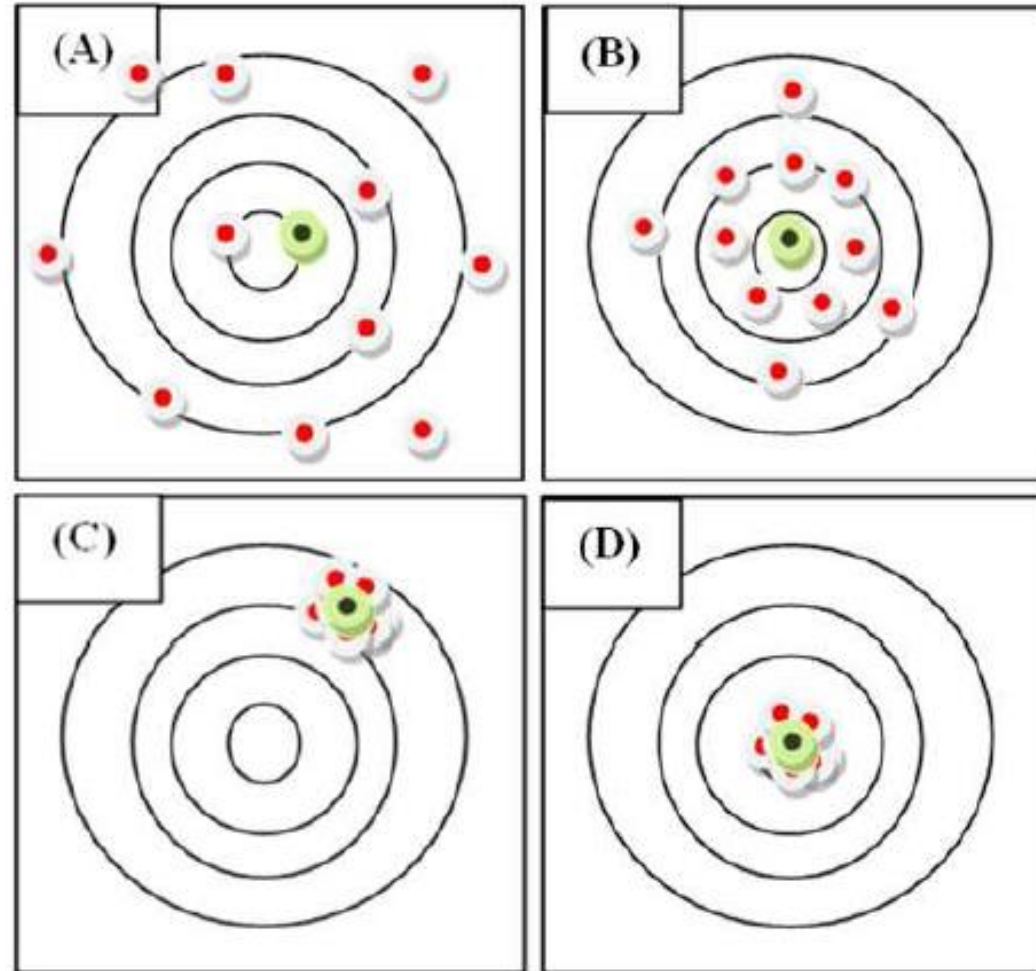
	MENOR DIVISÃO DO INSTRUMENTO	INCERTEZA INSTRUMENTAL
RÉGUA MILIMETRADA	1 mm	0,5 mm
PAQUÍMETRO (VERNIER com 20 divisões)	0,05 mm	0,05 mm
MICRÔMETRO (Tambor com 50 divisões)	0,01 mm	0,005 mm

Valor Verdadeiro de uma Grandeza Física

- O valor verdadeiro de uma grandeza é o valor que seria obtido de uma **medição perfeita** e a determinação do mesmo pode ser entendida como o objetivo final da medição. Entretanto, deve ser observado que o **valor verdadeiro é por natureza, indeterminado.**



Acurácia (ou Exatidão) *VERSUS* Precisão

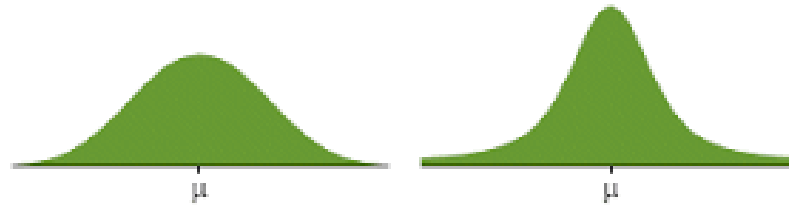


Tipos de incertezas

- Incerteza Instrumental



- Incerteza Estatística



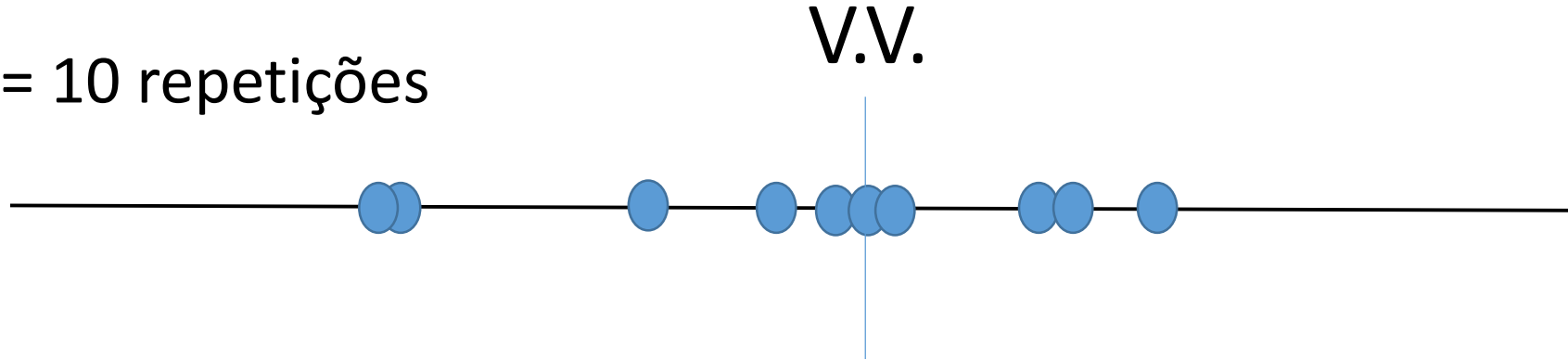
- Incerteza Sistemática e Incerteza Grosseira
Exemplos: erro de calibração, erro de leitura



Incerteza Estatística (ou Aleatória)

- É a medida da dispersão dos **n resultados** x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) em torno do valor verdadeiro V.V. Essa dispersão pode ser causada pelo experimentador ou por fatores externos.

Ex: $n = 10$ repetições



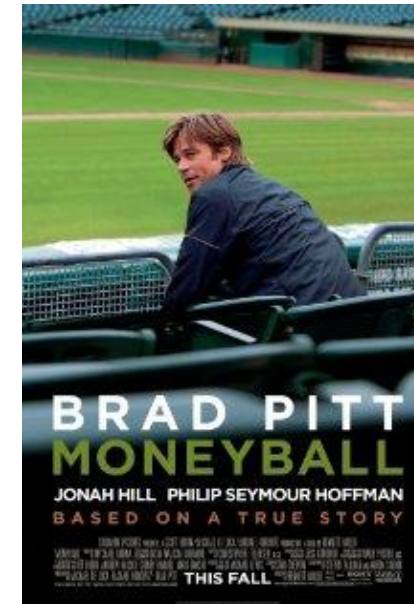
- Mas como podemos calcular essa dispersão se nunca dispomos do **valor verdadeiro**?

... para isso é que existe a Estatística

A Estatística é o ramo da matemática que é capaz de prever o DESCONHECIDO (fazer estimativas).

Exemplos:

- ✓ Valor verdadeiro de uma grandeza física
- ✓ Resultado de uma eleição.
- ✓ Previsão do Tempo
- ✓ Qualidade da produção industrial
- ✓ Previsão de resultados esportivos



Entretanto, todos resultados possuem uma margem de erro (incerteza).

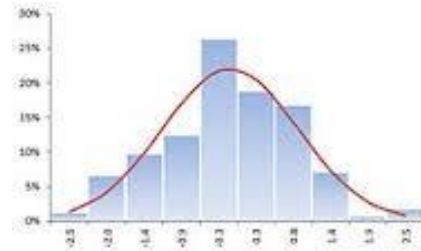
O grande esquema das coisas na Estatística

AMOSTRAGEM: COLETA DE DADOS DA POPULAÇÃO

POPULAÇÃO/FENÔMENO/
VALOR VERDADEIRO

INFINITOS ELEMENTOS: ∞

PARÂMETROS DESCONHECIDOS: μ, σ



AMOSTRA

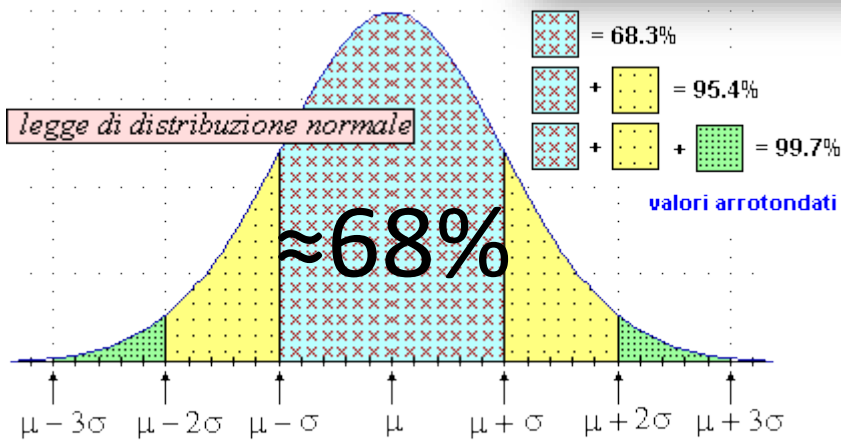
FINITO DE ELEMENTOS: N

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA: ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS μ E σ DA GAUSSIANA
Teorema Central do Limite $N \rightarrow \infty$

MODELO ESTATÍSTICO

$N(\mu, \sigma^2)$: GAUSSIANA

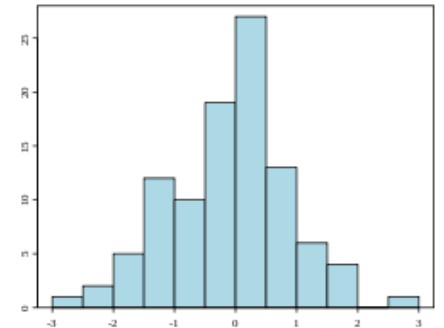
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



OBS!!! Quanto
maior o valor de N,
mais consistente
será **minha**
inferência

ANÁLISE DESCRITIVA
(ESTIMADORES)

- Média (amostral)
- Variância (amostral)
- Desvio Padrão (amostral)
- Histograma



$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (m_k - \langle m \rangle)^2$$

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m_k = \langle m \rangle$$

Quando medimos várias vezes uma grandeza dispomos de uma **AMOSTRA** (Amostragem)

- Análise Estatística Descritiva (*Estimadores*):

✓ Média (amostral)

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m_k = \langle m \rangle$$

✓ Variância (amostral)

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (m_k - \langle m \rangle)^2$$

ou

$$\sigma^2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2$$

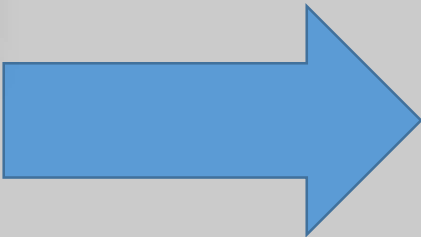
$$\sigma^2 = \langle \delta m^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (m_k - \langle m \rangle)^2$$

✓ Desvio Padrão (amostral)

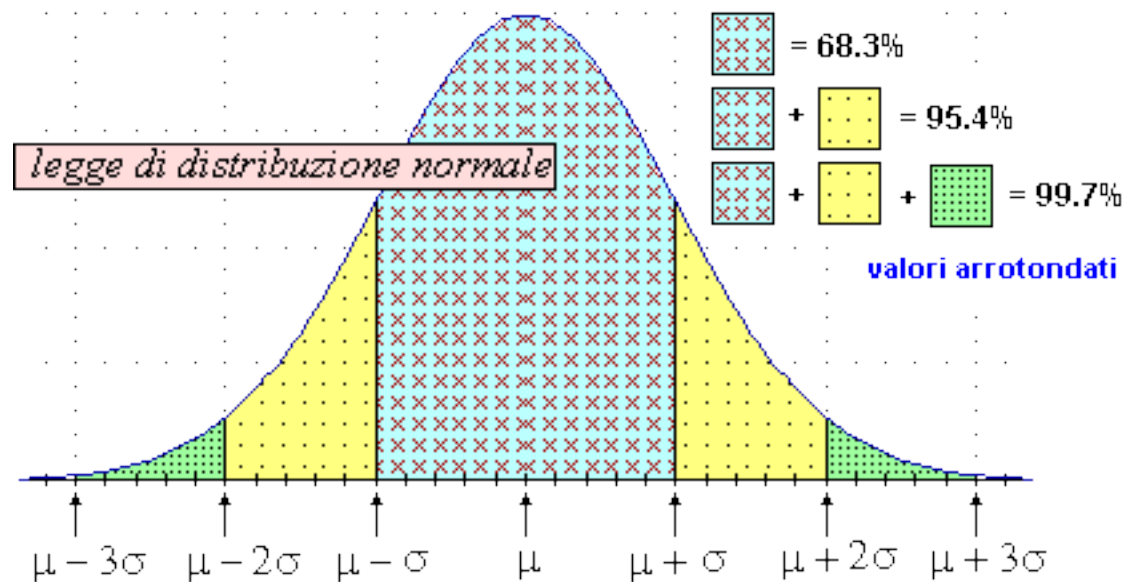
$$\sigma = \sqrt{\text{Variância}}$$

**AMOSTRA GRANDE
(VALOR DE N ALTO)**

... a partir da AMOSTRA, podemos fazer uma INFERÊNCIA dos parâmetros da gaussiana que melhor representam a medida

ESTIMADORES (AMOSTRA)		PARÂMETROS DA GAUSSIANA $N(\mu, \sigma^2)$
$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m_k = \langle m \rangle$ $\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (m_k - \langle m \rangle)^2$	INFERÊNCIA ESTATÍSTICA  Estimação Pontual	$\mu = \langle m \rangle$ $\sigma = \sigma_A$

Logo, conseguimos **estimar** uma Gaussiana que representa o “Valor Verdadeiro” da Medida

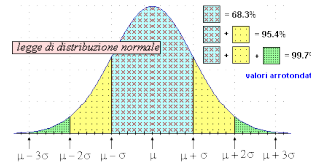


$$M = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m_k = \langle m \rangle$$

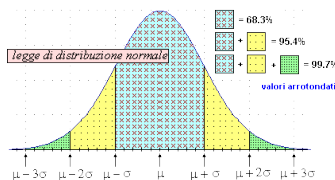
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (m_k - \langle m \rangle)^2$$

O Teorema Central do Limite diz que os parâmetros de uma gaussiana obedecem a distribuições gaussianas.



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Exemplo:

A média estimada $\mu = \langle m \rangle$ obedece a uma distribuição gaussiana de média μ e variância σ^2/N

Desvio padrão da média = $\sigma / \sqrt{N}$

Escrevendo uma medida com σ_{est}

- Pelo Teorema Central do Limite, se associarmos o valor mais confiável da medida à média do conjunto, a incerteza estatística será dada pelo desvio da média:

$$x = \langle x \rangle \pm \sigma_{\langle x \rangle}$$

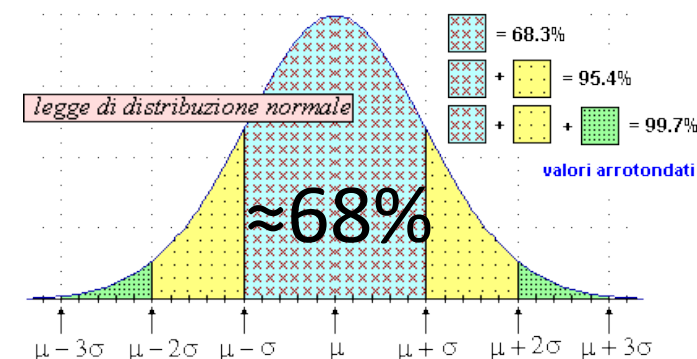
onde

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (\text{desvio da média})$$

Escrevendo uma medida com σ_{est} (2ª maneira)

- Caso associemos o valor mais confiável à apenas uma das medidas do conjunto, a incerteza estatística será dada pelo desvio padrão do conjunto:

$$x = x_i \pm \sigma$$



Ainda que utilizemos apenas 1 medida, é sempre necessário levantar a distribuição estatística associada ao erro aleatório, para determinarmos σ .

Combinando σ_{inst} e σ_{est}

$$\sigma_{\text{tot}} = \sqrt{\sigma_{\text{inst}}^2 + \sigma_{\text{est}}^2},$$

Questão 3: Um estudante de Física Experimental 1 queria verificar o valor da aceleração da gravidade g utilizando um pêndulo simples. Para tanto, ele mediu com uma trena o comprimento do pêndulo $L = (200,00 \pm 0,05)$ cm e realizou três medições consecutivas do período do pêndulo T com um cronômetro digital de precisão $0,0001$ s. As medições dos períodos foram: $T_1 = (2,8432 \pm 0,0001)$ s; $T_2 = (2,8367 \pm 0,0001)$ s; e $T_3 = (2,8805 \pm 0,0001)$ s.

- [1.5 ponto]** Escreva a medida de T com sua respectiva incerteza.
- [0.5 ponto]** Qual a natureza predominante da incerteza de T e o que você faria para reduzir a incerteza total da medida de T ?
- [1.0 ponto]** Calcule o valor da aceleração da gravidade com sua respectiva incerteza.

Dado: Fórmula do período de um pêndulo simples $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\text{a) } \langle T \rangle = \frac{2,8432 + 2,8367 + 2,8805}{3} = 2,853466667 \text{ s}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{3-1} [(2,8432 - \langle T \rangle)^2 + (2,8367 - \langle T \rangle)^2 + (2,8805 - \langle T \rangle)^2]} = 0,02363606 \text{ s}$$

$$\sigma_{\langle T \rangle} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} = \frac{0,02363606}{\sqrt{3}} = 0,01 \text{ s}$$

$$\sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{\langle T \rangle}^2 + \sigma_{inst}^2} = \sqrt{0,01^2 + 0,0001^2} = 0,01 \text{ s}$$

$$T = (2,85 \pm 0,01) \text{ s}$$

b) Estatística, pois $\sigma_{TOTAL} = \sigma_{\langle T \rangle}$

Reduzir erro $\rightarrow$ Aumentar N , pois $\sigma_{\langle T \rangle} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}}$

c)

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = 972,0755335$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \sigma_L\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 L}{T^3} \sigma_T\right)^2} = 6,825910093$$

$$g = (972 \pm 7) \text{ cm/s}^2$$

Resolvendo o Exemplo anterior com Excel



	A	B
1	T1	2,8432
2	T2	2,8367
3	T3	2,8805
4	MÉDIA	=MÉDIA(B1:B3)
5	DESVIO	

Press Enter

	A	B
1	T1	2,8432
2	T2	2,8367
3	T3	2,8805
4	MÉDIA	2,853466667
5	DESVIO	

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m_k = \langle m \rangle$$

	A	B
1	T1	2,8432
2	T2	2,8367
3	T3	2,8805
4	MÉDIA	2,853466667
5	DESVIO	=DESVPAD.A(B1:B3)

Press Enter

	A	B
1	T1	2,8432
2	T2	2,8367
3	T3	2,8805
4	MÉDIA	2,853466667
5	DESVIO	0,02363606

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (m_k - \langle m \rangle)^2$$