Experimento 1

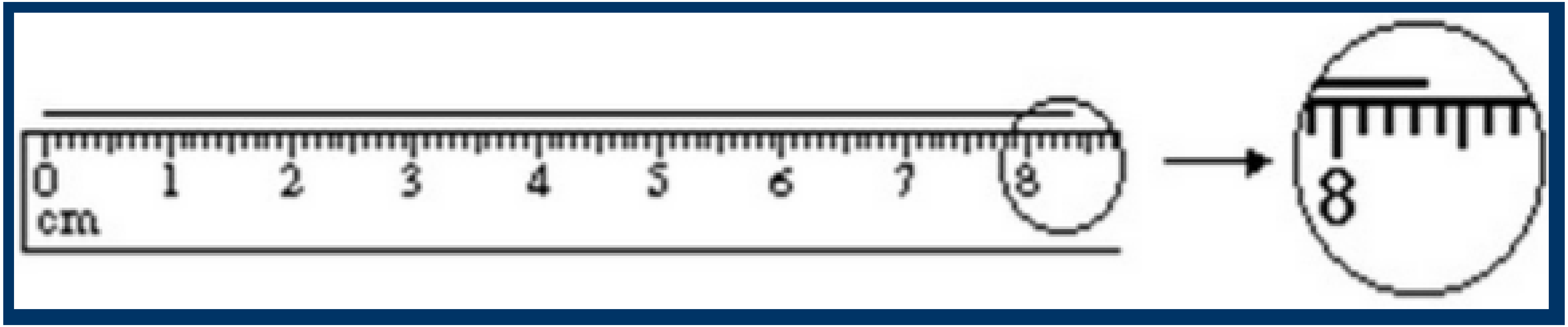
Aulas A e B:

Medidas e Incertezas

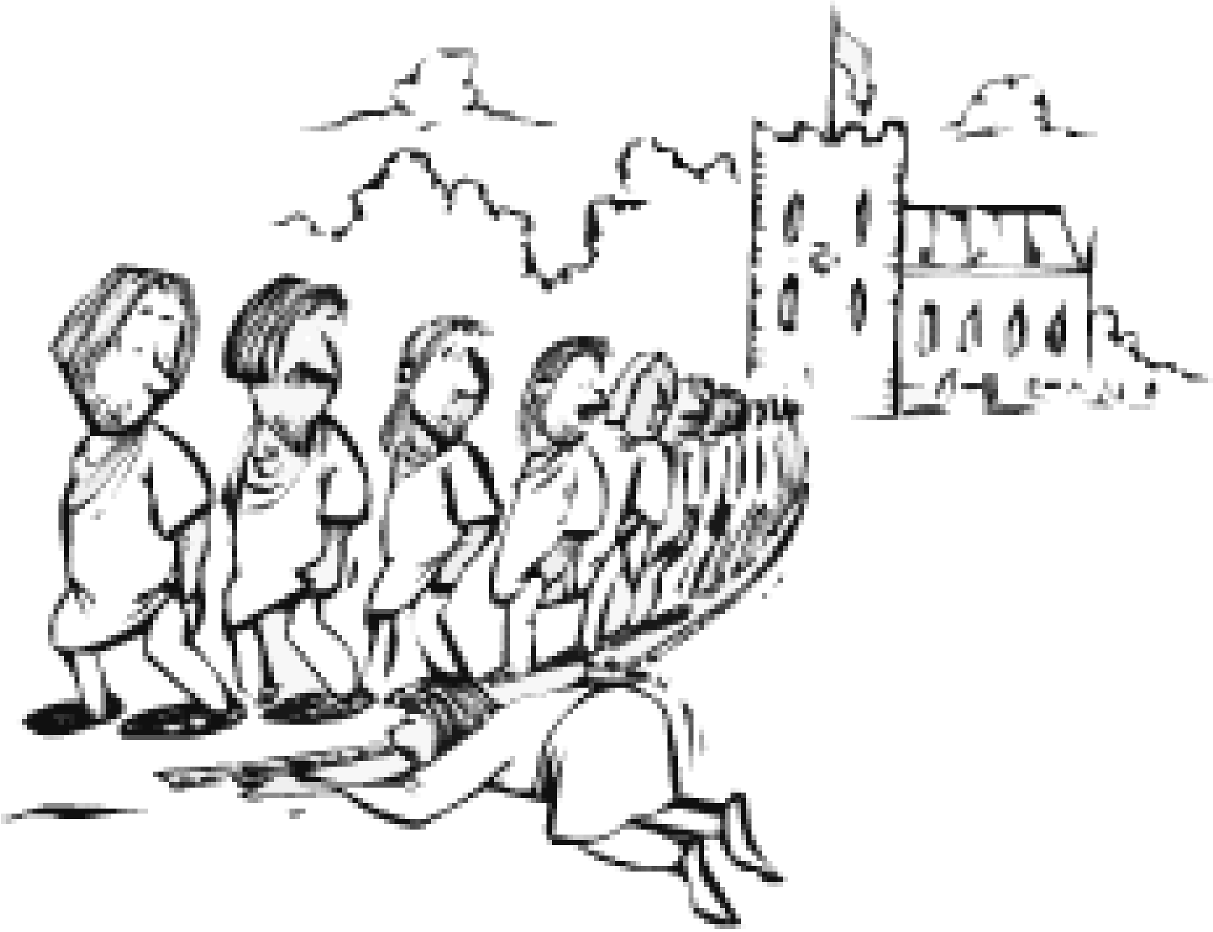
Propagação de Incertezas

Professor: Leonardo Machado Cavalcanti

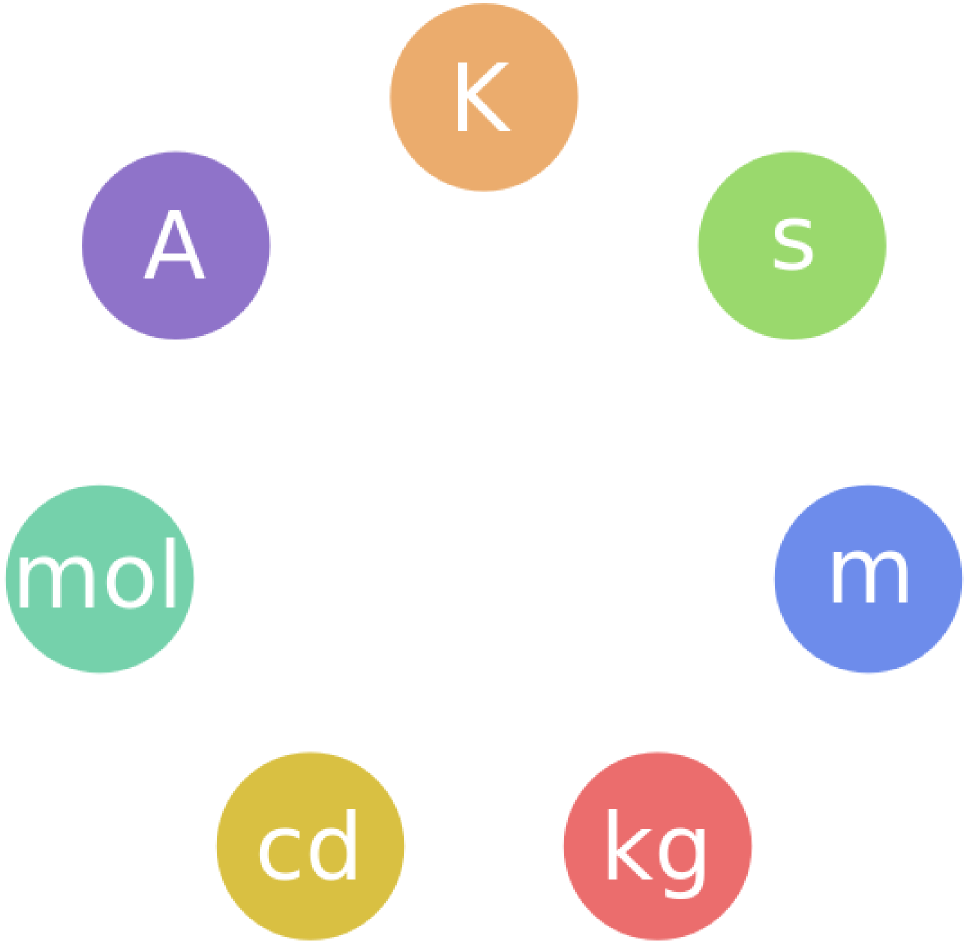
Como expressar resultados de medidas?



À procura de um padrão de medida...



Padrões Internacionais de Medidas (SI)

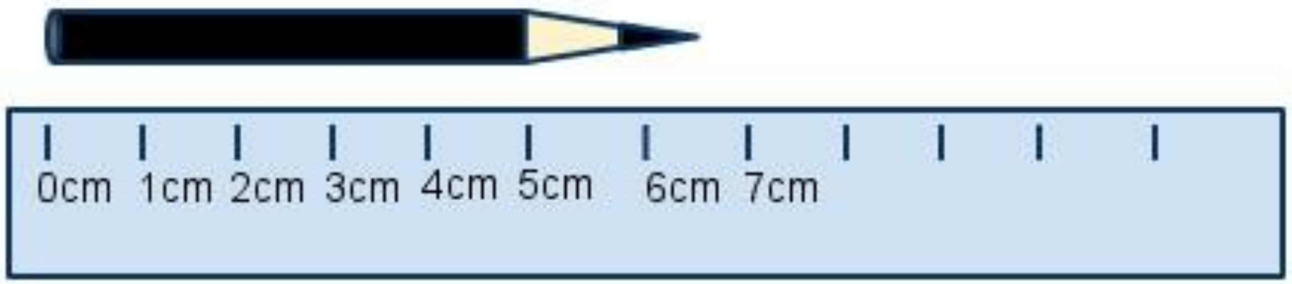


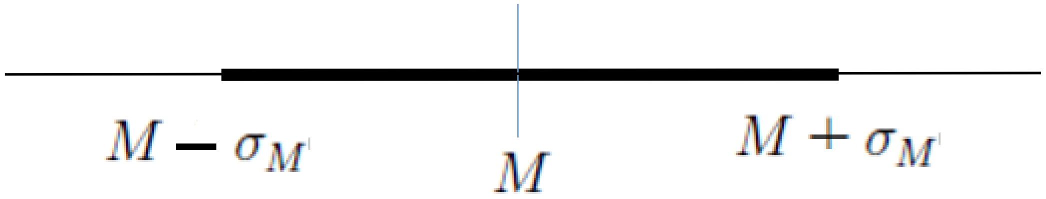
Padrões Internacionais de Medidas (SI)

- Segundo: o tempo que um isótopo específico do átomo de césio leva para realizar 9 192 631 770 oscilações entre duas configurações eletrônicas internas definidas.
- Metro: a distância percorrida pela luz no vácuo na fração de 1 / 299 729 458 de um segundo (i.e. a velocidade da luz é definida como exatamente 299 729 458 m/s).
- Quilograma: a massa de um cilindro de platina-irídio depositado no Birô Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, França.

Medida e incerteza

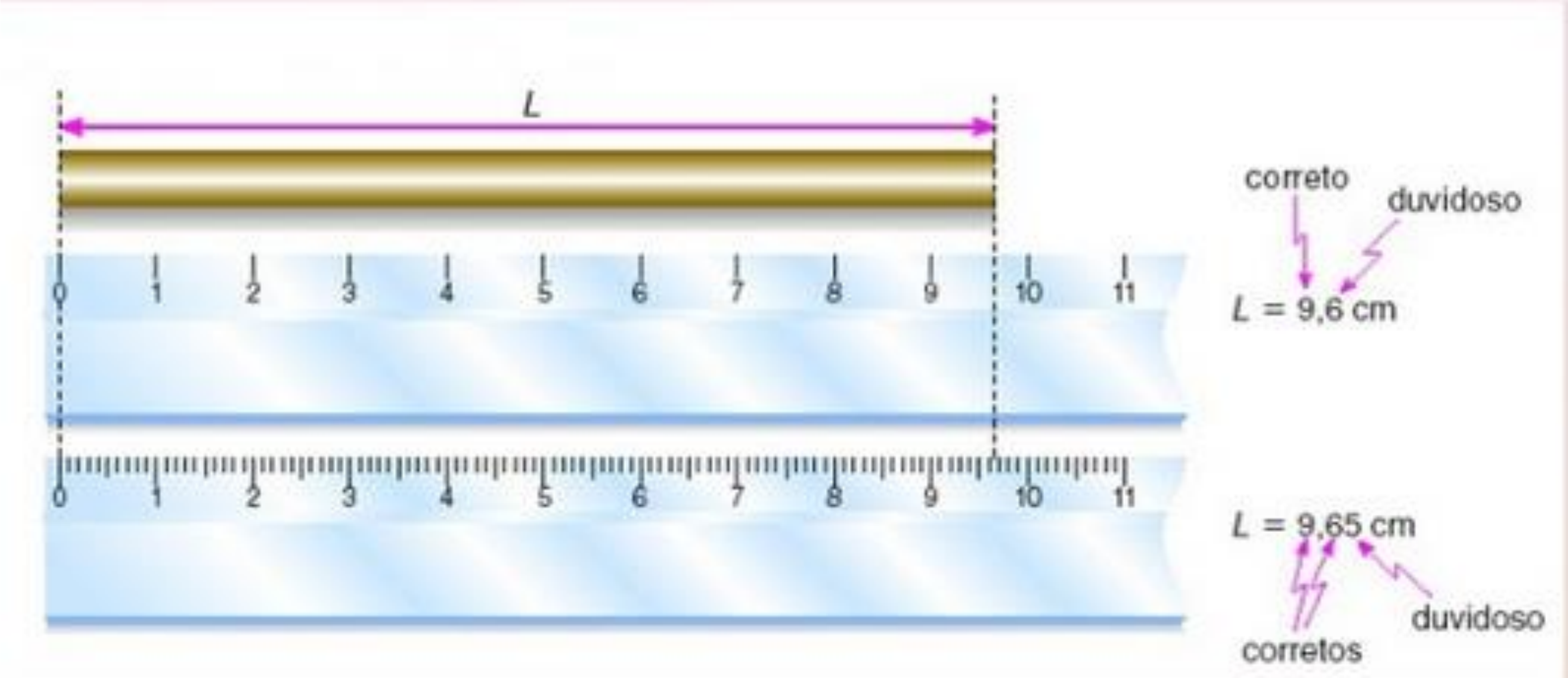
$$m = M \pm \sigma_M$$





Algarismos Significativos

- A incerteza na medição implica que não faz sentido representar resultados de medida por valores numéricos com tantos algarismos quanto se queiram. Os algarismos que de fato guardam sentido são algarismo significativos



Quantos Algarismos Significativos?

- 18,98 m 4
- 10,4 m 3
- 0,45 m 2
- 45,90 m 4
- 0,000080 m 2

A incerteza é que manda!

$$730{,}42 \pm 0{,}83 \text{ m},$$

$$730{,}\underline{4} \pm 0{,}8 \text{ m}.$$

Algarismo duvidoso

Como regra geral, convencionamos neste curso utilizar apenas 1 algarismo significativo na incerteza.

Regras de Arredondamento

Regra 1 - Quando o algarismo a ser desprezado for inferior a 5, mantém-se o algarismo à sua esquerda inalterado. Ou seja, 'arredonda-se para baixo'. Exemplos:

$$
\begin{aligned}
l &= 3{,}4745 \pm 0{,}0320 \text{ m} &\longrightarrow\quad l &= 3,47 \pm 0{,}03 \text{ m}, \\
t &= 1{,}11238 \pm 0{,}00533 \text{ s} &\longrightarrow\quad t &= 1,112 \pm 0{,}005 \text{ s}, \\
m &= 9{,}49075 \pm 1{,}11111 \text{ kg} &\longrightarrow\quad m &= 9 \pm 1 \text{ kg}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Regras de Arredondamento

Regra 2 - Quando o algarismo a ser desprezado for superior a 5 ou igual a 5 seguido por um algarismo diferente de zero, soma-se a unidade ao algarismo anterior. Ou seja, 'arredonda-se para cima'. Exemplos:

$$\begin{aligned} l &= 3{,}4751 \pm 0{,}0290 \text{ m} &\longrightarrow\quad l &= 3,48 \pm 0{,}03 \text{ m}, \\ t &= 1{,}11260 \pm 0{,}00483 \text{ s} &\longrightarrow\quad t &= 1,113 \pm 0{,}005 \text{ s}, \\ m &= 9{,}51075 \pm 0{,}96315 \text{ kg} &\longrightarrow\quad m &= 10 \pm 1 \text{ kg}. \end{aligned} \tag{6}$$

Regras de Arredondamento

Regra 3 - Quando o algarismo a ser desprezado for igual a 5 seguido de zeros (ainda que implícitos), aplica-se a seguinte convenção: se o algarismo anterior for ímpar, acrescenta-se uma unidade a ele; se for par, permanece inalterado.

O arredondamento tem efeito nulo sobre o resultado numérico da medida, uma vez que os algarismos desprezados não são confiáveis. Exemplos:

$$\begin{aligned} 1{,}450 \pm 0{,}123 \text{ s} \quad &\longrightarrow \quad 1,4 \pm 0{,}1 \text{ s}, \\ 45{,}350 \pm 0{,}275 \text{ kg} \quad &\longrightarrow \quad 45{,}4 \pm 0{,}3 \text{ kg}. \end{aligned} \tag{7}$$

Notação Científica

$$\mathcal{M} \cdot 10^p,$$

Na notação científica, o número de algarismos da mantissa é igual ao número de algarismos significativos da medida.

$$2483 \pm 4 \text{ s} \quad \rightarrow \quad (2{,}483 \pm 0{,}004) \cdot 10^3\text{s},$$

$$0,00034 \pm 0,00007 \text{ m} \quad \rightarrow \quad (3{,}4 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-4}\text{m}.$$

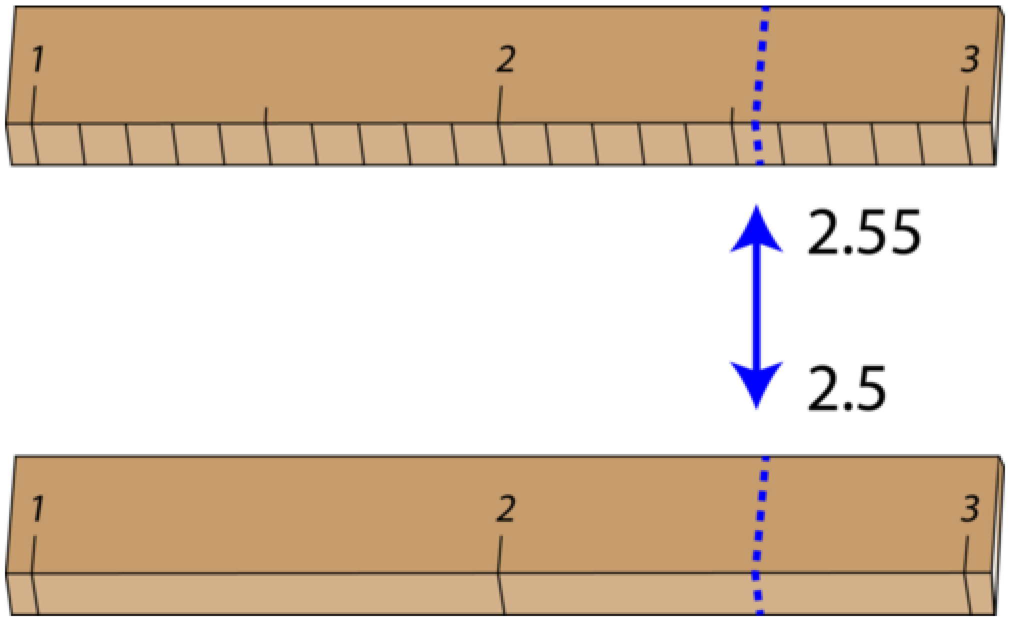
Devemos empregar a notação científica também para tornar correta a notação da incerteza usando apenas 1 algarismo significativo. Por exemplo, a forma correta seria escrever:

$$2\ 100\ 000 \pm 1\ 000 \text{ s} \quad \longrightarrow \quad (2{,}100 \pm 0{,}001) \cdot 10^6 \text{ s}. \tag{9}$$

Compatibilidade entre medidas

Duas medidas são compatíveis quando seus intervalos de confiança se sobrepõem, definição essa que substitui o conceito matemático de igualdade em nosso caso.

Essas medidas são compatíveis?



Precisão Maior (Menor Incerteza)

Precisão Menor (Maior Incerteza)

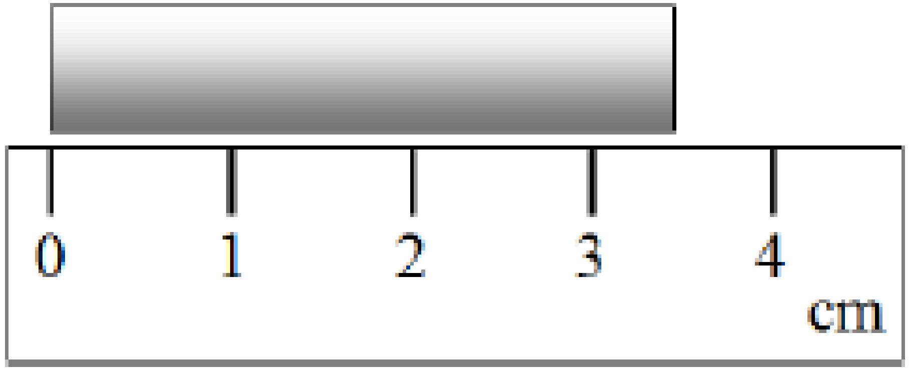
Como ler os instrumentos?

Adotamos neste curso algumas convenções para estabelecer a incerteza instrumental:

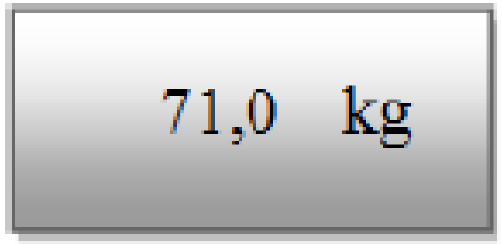
- Se o instrumento permitir a avaliação visual do algarismo duvidoso, a incerteza será tomada como **metade da menor divisão** de leitura do instrumento.

- Se o instrumento não permitir a avaliação do algarismo duvidoso, este será considerado como o último algarismo (mais à direita) da leitura do instrumento; a incerteza será tomada como **igual a 1 na posição desse algarismo.**

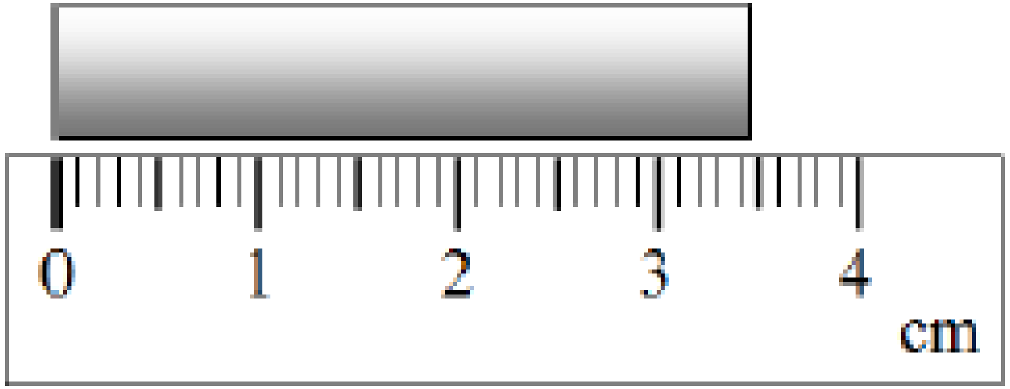
Como ler os instrumentos?



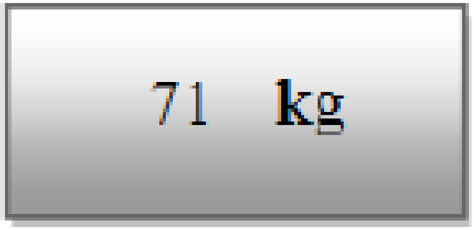
(3,**4** ± 0,5) cm



(71,**0** ± 0,1) kg



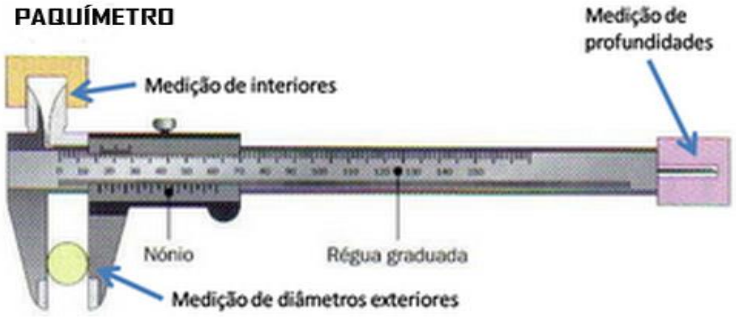
(3,4**6** ± 0,05) cm



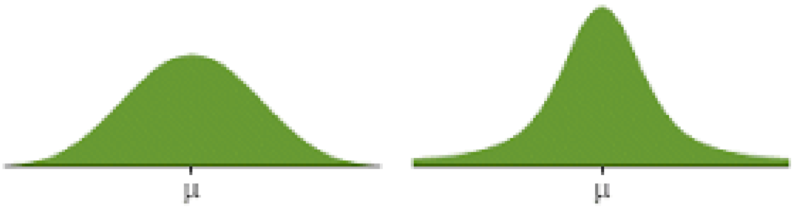
(7**1** ± 1) kg

Tipos de incertezas

- Incerteza Instrumental



- Incerteza Estatística



- Incerteza Sistemática

Composição de fontes independentes de erro

- Quando há duas fontes de incerteza, a incerteza total é dada por:

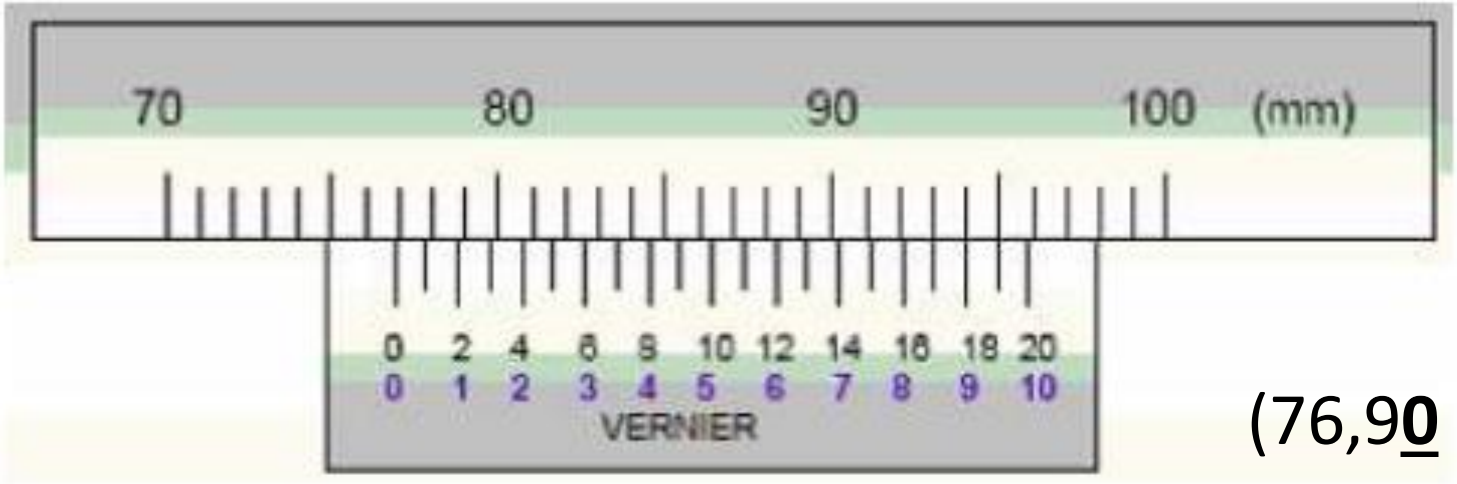
$$\sigma_{TOTAL}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Incerteza Total:
Combinação de Fontes de Incerteza

$$\sigma_{TOTAL}^2 = \sigma_{instr}^2 + \sigma_{est}^2$$

$$\sigma_{TOTAL} = \sqrt{\sigma_{instr}^2 + \sigma_{est}^2}$$

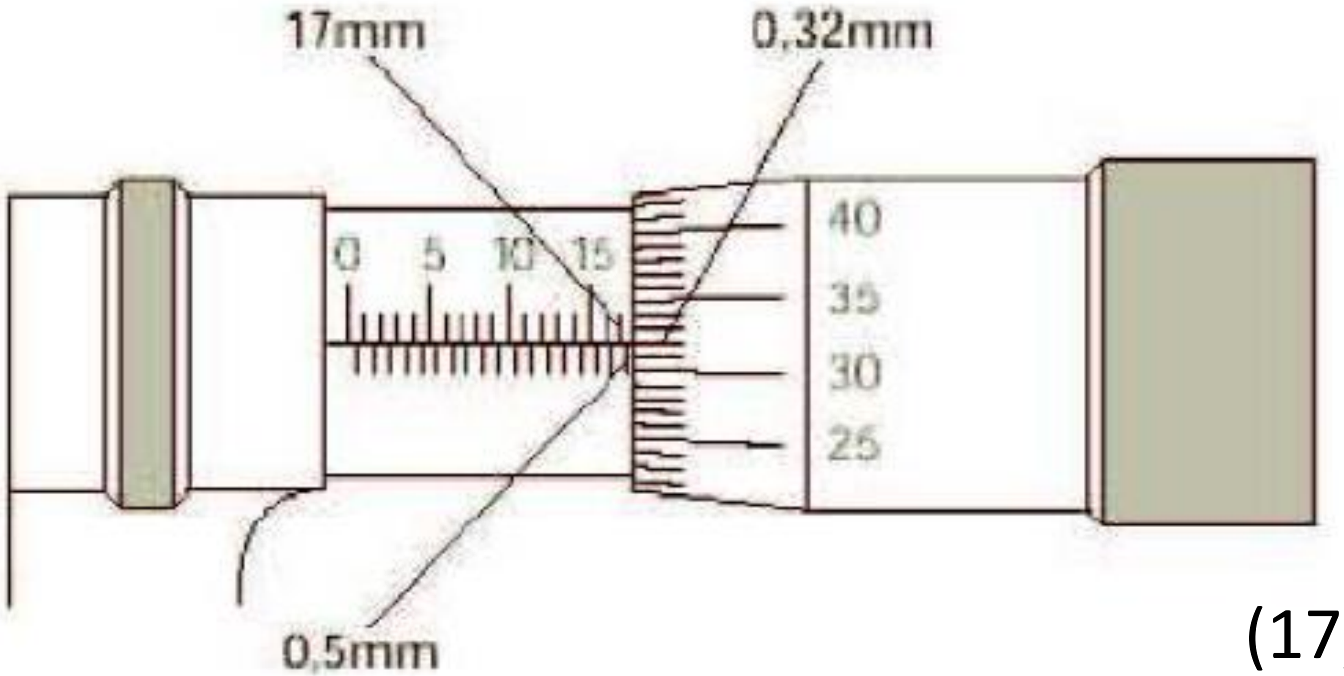
Paquímetro



(76,9**0** ± 0,05) mm

http://www.stefanelli.eng.br/webpage/metrologia/i-metrologia.html

Micrômetro



(17,82**<u>0</u>** ± 0,005) mm

http://www.stefanelli.eng.br/webpage/metrologia/i-metrologia.html

Propagando Incertezas

Em várias situações não é possível medir diretamente a grandeza de interesse. Nesse caso, o caminho é **inferir** seu valor a partir de medidas das grandezas de que depende ("medida indireta"). A incerteza da grandeza inferida é obtida pela **propagação** das incertezas das grandezas medidas.

Propagando Incertezas na soma:

$$m_1 = M_1 + \sigma_{M_1}$$

$$m_2 = M_2 + \sigma_{M_2}.$$

$$\boxed{m = m_1 + m_2}$$

$$m = M + \sigma_M$$

Propagando incertezas na soma:

$$m_1 = M_1 + \sigma_{M_1}$$

$$m_2 = M_2 + \sigma_{M_2}.$$

$$\boxed{m = m_1 + m_2}$$

$$m = M + \sigma_M$$

$$M = M_1 + M_2$$

$$(\sigma_M)^2 = (\sigma_{M_1})^2 + (\sigma_{M_2})^2.$$

$$\boxed{m = (M_1 + M_2) \pm \sqrt{(\sigma_{M_1})^2 + (\sigma_{M_2})^2},}$$

Propagando incertezas na soma:

$$(\sigma_M)^2 = (\sigma_{M_1})^2 + (\sigma_{M_2})^2.$$

De fato, essa expressão *limita* σ_M *inferiormente pela grandeza de maior incerteza*, por ser uma soma de quadrados. Se $\sigma_{M_1} \gg \sigma_{M_2}$, então $\sigma_M \approx \sigma_{M_1}$ (demonstre!).

Por outro lado, se as duas incertezas são parecidas ($\sigma_{M_1} \approx \sigma_{M_2}$), então a Eq. (15) fornece algo mais otimista do que a soma das incertezas, pois obtemos $\sigma_M \approx \sqrt{2}\,\sigma_{M_1} < \sigma_{M_1} + \sigma_{M_2}$ (demonstre!).

Note que *a incerteza se calcula da mesma forma para uma soma entre números com sinais opostos*. Se, por exemplo, vale que $m_1 > 0$ e $m_2 < 0$, a resposta seria $m = |M_1| - |M_2| \pm \sqrt{(\sigma_{M_1})^2 + (\sigma_{M_2})^2}$, sem mudança no cálculo da incerteza.

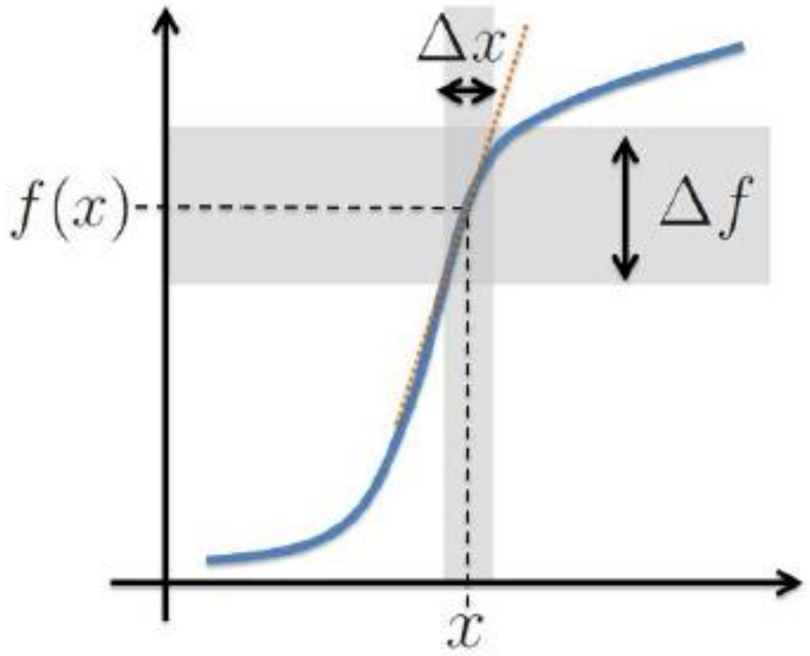
Como regra informal, na propagação das incertezas de uma soma, podemos desprezar de início incertezas menores que a metade da maior das incertezas das parcelas.

Propagando incertezas na soma:

- No geral:

$$(\sigma_M)^2 = (\sigma_{M_1})^2 + (\sigma_{M_2})^2 + \cdots + (\sigma_{M_N})^2 = \sum_k (\sigma_{M_k})^2.$$

Propagação de incertezas por linearização a derivadas parciais



$$\Delta f = \frac{df}{dx}\Delta x$$

$$\sigma_f = \left|\frac{df}{dx}\right|\sigma_x$$

- O que é linearização??

- O que é derivada parcial?? $\dfrac{\partial y}{\partial x}$

Propagação de incertezas por linearização a derivadas parciais

$f(x, y)$ Função de duas variáveis

$$\sigma_f \approx \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \cdot \sigma_x + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \cdot \sigma_y.$$

Para sermos mais otimistas, iremos considerar a seguinte fórmula para incerteza de *f* (Vamos utilizá-la durante todo o curso!):

$$\boxed{(\sigma_f)^2 = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \sigma_y\right)^2,}$$

Propagação de incertezas por linearização a derivadas parciais

No geral:

$$(\sigma_f)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f \cdot \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f \cdot \sigma_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_N} f \cdot \sigma_{x_N}\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \cdot \sigma_{x_k}\right)^2$$

Exemplo: Determinar a incerteza de ρ

$$\rho = \frac{M}{L^3}$$

$$\rho = \frac{M}{L^3} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial M} & = & \dfrac{1}{L^3}. \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial L} & = & -\dfrac{3M}{L^4}. \end{cases}$$

$$(\sigma_\rho)^2 = \left(\frac{1}{L^3}\,\sigma_M\right)^2 + \left(\frac{3M}{L^4}\,\sigma_L\right)^2.$$

$$\left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(3\frac{\sigma_L}{L}\right)^2$$

Curiosidades!

$$\left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(3\frac{\sigma_L}{L}\right)^2. \tag{31}$$

A grandeza L contribui com peso três vezes maior na incerteza final. O motivo estatístico para isso é o fato de que sua incerteza aparece três vezes na expressão e de forma correlacionada.

Note que, caso o valor de alguma incerteza relativa seja muito grande, a propagação por expansão linear não será precisa no cálculo da incerteza final. Nesse caso, podemos expandir a função até ordens mais altas, ou utilizar o 'método trabalhoso' (mais conservador) da seção 4 para estimar a incerteza.